Лекция 4.

Тема «Рациональные числа»

План

1. Понятие дроби. Равносильные дроби. Свойства дробей. Сравнение дробей
2. Рациональные числа.
3. Сложение рациональных чисел и его свойства
4. Вычитание рациональных чисел
5. Умножение рациональных чисел и его свойства
6. Множество рациональных чисел как расширение множества целых чисел.
7. Отношения порядка в Q. Свойства множества рациональных чисел

Литература:

1. Евтыхова Н.М. Математика в таблицах и схемах для студентов 2 курса факультета педагогики и психологии / Н.М. Евтыхова - Майкоп, 2019.изд 2-е – исправленное и дополн.-118 с. - (С.91-100 (таблицы 64-74))
2. Стойлова, Л.П. Математика: учеб. для студентов учреждений высш. образования / Л.П. Стойлова. – 4-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 464 с. (С. 351-362)
3. Математика. Сборник задач: учеб.пособие для студ.учреждений высш.проф.образования/[Л.П.Стойлова, Е.А.Конобеева, Т.А.Конобеева, И.В.Шадрина]. – 2-е изд.,стер. – М.: изд.центр «Академия», 2013. – 240с. (С.150-153)

Таблица 64. Понятие дроби. Равносильные дроби

	Формулировка	Запись	примеры и доказательства
определение	Упорядоченная пара целых чисел $(a;b)$, где b отлично от нуля, записанная в виде $\frac{a}{b}$ называется дробью	числитель $\leftarrow$ $\frac{a}{b}$ $\rightarrow$ з	
определение	Если $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$, то дробь $\frac{a}{b}$ – правильная Если $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$, то дробь $\frac{a}{b}$ – неправильная Если НОД$(\lvert a\rvert,\lvert b\rvert) = 1$, то дробь $\frac{a}{b}$ - несократимая	$\frac{2}{3}$ - правильная дробь $\frac{3}{2}$ – неправильная дробь $\frac{5}{6}$ – несократимая дробь	
определение	дробь $\frac{a}{b}$ равносильна дроби $\frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство: $a \cdot d = b \cdot c$	$(\forall a, b, c, d \in \boldsymbol{Z})[b \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c]$	$\frac{2}{3} \sim \frac{14}{21}$, т.к. 2·21=3·14

Свойства отношения равносильности дробей		
рефлексивность	$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$	$a{\cdot}b=b{\cdot}a$, верно в силу коммутативности умножения целых чисел
симметричность	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ и $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b} \Leftrightarrow c \cdot b = d \cdot a$ $a \cdot d = d \cdot a \wedge b \cdot c = c \cdot b$ верно в силу коммутативности умножения целых чисел
транзитивность	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \sim \frac{p}{q} \Longrightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{p}{q}$	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ $\frac{c}{d} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow c \cdot q = d \cdot p$ перемножим почленно полученные равенства: $a \cdot d \cdot c \cdot q = b \cdot c \cdot d \cdot p$ сократим обе части на c и на d, получим $a \cdot q = b \cdot p$, тогда по определению $\frac{a}{b} \sim \frac{p}{q}$

ТАБЛИЦА 65. СВОЙСТВА ДРОБЕЙ

	Формулировка	**Запись**	**примеры**
основное свойство дроби	Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же целое число, отличное от нуля, то получится дробь равносильная данной	$\frac{a}{b} \sim \frac{ap}{bp}$	$\frac{2}{3} \sim \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$
следствие 1	Любую дробь вида $\frac{a}{b}$, где a и b целые числа и $b \neq 0$ можно привести к дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}$	если $b > 0$, то $\frac{a}{b}$ имеет искомый вид если $b < 0$, то $\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot (-1)}{b \cdot (-1)}$, тогда $b \cdot (-1)$- натуральное число	$\frac{2}{-3} \sim \frac{2 \cdot (-1)}{-3 \cdot (-1)} = \frac{-2}{3}$
следствие 2	Любые две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно привести к общему знаменателю	$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ $\frac{c}{d} \sim \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \sim \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$	$\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{8}$ $\frac{2}{3} \sim \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$ $\frac{7}{8} \sim \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$
следствие 2.1.	Любые две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно привести к наименьшему общему знаменателю: 1. Находят НОК (b;d)=k 2. Находят дополнительные множители к каждой дроби: k:b=k_1; k:d=k_2 3. Умножают соответственно a на k_1, c на k_2	$\frac{a}{b} \sim \frac{a \cdot k_1}{k}$ $\frac{c}{d} \sim \frac{c \cdot k_2}{k}$	$\frac{7}{8}$ и $\frac{11}{30}$ НОК(8;15)=$2^3 \cdot 3 \cdot 5$=120 120:8=15 120:30=4 $\frac{7}{8} \sim \frac{7 \cdot 15}{120} = \frac{105}{120}$ $\frac{11}{30} \sim \frac{11 \cdot 4}{120} = \frac{44}{120}$
следствие 3	Если сократить числитель и знаменатель дроби на их наибольший общий делитель, то получится несократимая дробь	$\text{НОД}(\lvert a \rvert, \lvert b \rvert) = D$ $\frac{a}{b} \sim \frac{a : D}{b : D} = \frac{p}{q}$	$\frac{49}{56}$; $\text{НОД}(49,56) = 7$ $\frac{49}{56} \sim \frac{49:7}{56:7} = \frac{7}{8}$.

Таблица 66. Сравнение дробей

Отношения	Формулировка	Запись	Примеры
отношение равенства	Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны, если равны соответственно их числители и знаменатели	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$	$\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$.
отношение больше	Из двух дробей с равными знаменателями больше та, у которой числитель больше	$\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \Leftrightarrow a > c$	$\frac{7}{8} > \frac{5}{8}$.
	Из двух дробей с равными числителями больше та, у которой знаменатель меньше	$\frac{a}{b} > \frac{a}{d} \Leftrightarrow b < d$	$\frac{7}{8} > \frac{7}{11}$.
	дробь $\frac{a}{b}$ больше дроби $\frac{c}{d}$ если: – Верно равенство: $a \cdot d = b \cdot c$ – При приведении их к общему знаменателю, числитель первой дроби больше числителя второй дроби	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$ $\frac{a}{b} \sim \frac{s}{k}$ $\frac{c}{d} \sim \frac{r}{k}$ $\frac{s}{k} > \frac{r}{k} \Leftrightarrow s > r$	$\frac{7}{8} > \frac{11}{30}$, т. к. $7 \cdot 30 > 8 \cdot 11$ 210>88, или $\frac{7}{8} \sim \frac{7 \cdot 15}{120} = \frac{105}{120}$ $\frac{11}{30} \sim \frac{11 \cdot 4}{120} = \frac{44}{120}$ $\frac{105}{120} > \frac{44}{120}$

Таблица 67. Рациональные числа

<table>
<tr><th></th><th>Формулировка</th><th>Запись</th><th>Примеры, доказательства</th></tr>
<tr><td>определение</td><td>Пусть М - множество дробей. Зададим на нем отношение равносильности. Так как оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, то оно есть отношение эквивалентности. Тогда это отношение разбивает множество всех дробей на классы эквивалентности.
Рациональное число – это класс равносильных между собой дробей</td><td>$$M = \left\{\frac{x}{y}\middle| x \in \boldsymbol{Z} \wedge y \in \boldsymbol{Z} \wedge y \neq 0\right\}$$
R: «быть равносильной»
$a =$
$= \left\{\frac{m}{n}\middle| \frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \wedge p \in \boldsymbol{Z} \wedge q \in \boldsymbol{Z} \wedge q \neq 0 \wedge D(\lvert p\rvert, \lvert q\rvert) = 1\right\}$
a- Рациональное число</td><td>$a == \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{-5}{-10}, \frac{5}{10}, \dots\right\}$

$b =$
$= \left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{-3}{-7}, \frac{9}{21}, \frac{-9}{-21}, \frac{15}{35}, \dots\right\}$</td></tr>
<tr><td>Теорема</td><td>Для любого рационального числа a существует единственная представляющая его несократимая дробь</td><td colspan="2" rowspan="2">$$(\forall a \in \boldsymbol{Q})\left(\exists! \frac{p}{q}\right)[p \in \boldsymbol{Z} \wedge q \in \boldsymbol{N} \wedge D(\lvert p\rvert, q) = 1]$$
доказательство:1) **(∃)** пусть рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$ и НОД(m,n)=d, тогда m=pd и n=qd и НОД($\lvert p\rvert, q$)=1. тогда по свойству равносильных дробей $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$, значит дробь $\frac{p}{q}$ также представляет рациональное число a.
2)**(!)** пусть существует две несократимые дроби представляющее рациональное число a: $\frac{p}{q}$ и $\frac{s}{t}$. Тогда по определению рационального числа: $\frac{p}{q} \sim \frac{s}{t}$, тогда по определению равносильных дробей справедливо равенство: $pt = qS$
$(pt) \vdots q$, т.к. НОД($\lvert p\rvert, q$)=1. То $\overline{p \vdots q}$, тогда $t \vdots q$, тогда по определению делимости
$(\exists k \in \boldsymbol{N})[t = qk]$. Тогда $pqk = qs$. По закону сократимости для целых чисел получим $pk = S$. Таким образом: $s = pk$ и $t = qk$. По определению делимости :
$t \vdots k$ и $s \vdots k$, т.е. дробь $\frac{s}{t}$ - сократимая. А это противоречит выбору данной дроби по условию</td></tr>
<tr><td colspan="2">Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать дроби вида $\frac{m}{n}$, где
$$m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}$$</td></tr>
</table>

Таблица 68. Сложение рациональных чисел

	Формулировка	**Запись**	**Примеры**
Определение	Пусть даны два рациональных числа a и b, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{s}{t}$, тогда суммой рациональных чисел a и b, называется рациональное число c, представленное дробью $\frac{mt+sn}{nt}$	$a+b=\frac{m}{n}+\frac{s}{t}=\frac{mt+sn}{nt}=c$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 3}{15}=\frac{22}{15}$
Правило 1	Если рациональные числа представлены дробями с одинаковыми знаменателями, то чтобы их сложить, достаточно сложить числители слагаемых, а знаменатель оставить тот же	$a+b=\frac{m}{n}+\frac{s}{n}=\frac{m+s}{n}$	$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$
Правило 2	Если рациональные числа представлены дробями с разными знаменателями, то чтобы их сложить, достаточно привести их к наименьшему общему знаменателю и применить правило 1	$a+b=\frac{m}{n}+\frac{s}{t}=\frac{mk_1}{k}+\frac{sk_2}{k}=$ $=\frac{mk_1+sk_2}{k}$	$\frac{2}{33}+\frac{4}{15}=\frac{2\cdot 5+4\cdot 11}{165}=\frac{54}{165}$
Теорема	Сумма рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей	пусть $a=\frac{m}{n}\wedge a=\frac{m_1}{n_1}$; пусть $b=\frac{s}{t}\wedge b=\frac{s_1}{t_1}$, $a+b=\frac{m}{n}+\frac{s}{t}\wedge a+b=\frac{m_1}{n_1}+\frac{s_1}{t_1}$, $\frac{m}{n}+\frac{s}{t}\sim\frac{m_1}{n_1}+\frac{s_1}{t_1}$	
свойства сложения	1. закон коммутативности	$(\forall a,b\in\boldsymbol{Q})[a+b=b+a]$	
	2. закон ассоциативности	$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Q})[(a+b)+c=a+(b+c)]$	
	3. существование нейтрального элемента	$(\forall a\in\boldsymbol{Q})(\exists 0\in\boldsymbol{Q})[a+0=0+a=a]$	
	4. существование симметричного элемента	$(\forall a\in\boldsymbol{Q})(\exists -a\in\boldsymbol{Q})[a+(-a)=-a+a=0]$	
	5. закон сократимости (в одну сторону)	$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Q})[a=b\Leftrightarrow a+c=b+c)]$	
	6. закон монотонности (в одну сторону)	$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Q})[a>b\Leftrightarrow a+c>b+c)]$	

Таблица 69. Вычитание рациональных чисел

	Формулировка	Запись	Примеры
Определение	Разность двух рациональных чисел a и b называется такое рациональное число с, что $a=b+c$	$(\forall a,b,c \in \boldsymbol{Q})[a-b=c \Leftrightarrow a=b+c]$	
Определение	Пусть даны два рациональных числа a и b, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{s}{t}$, тогда разностью рациональных чисел a и b, называется рациональное число c, представленное дробью $\frac{mt-sn}{nt}$	$a-b=\frac{m}{n}-\frac{s}{t}=\frac{mt-sn}{nt}=c$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 5-4\cdot 3}{15}=\frac{-2}{15}=-\frac{2}{15}$
Правило 1	Если рациональные числа представлены дробями с одинаковыми знаменателями, то чтобы их вычесть, достаточно вычесть из числителя уменьшаемого числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тот же	$a-b=\frac{m}{n}-\frac{s}{n}=\frac{m-s}{n}$	$\frac{2}{5}-\frac{4}{5}=\frac{2-4}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$
Правило 2	Если рациональные числа представлены дробями с разными знаменателями, то чтобы найти их разность, достаточно привести их к наименьшему общему знаменателю и применить правило 1	$a-b=\frac{m}{n}-\frac{s}{t}=\frac{mk_1}{k}-\frac{sk_2}{k}=\frac{mk_1-sk_2}{k}$	$\frac{2}{33}-\frac{4}{15}=\frac{2\cdot 5-4\cdot 11}{165}=\frac{-34}{165}=-\frac{34}{165}$
Теорема	Разность рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей	пусть $a=\frac{m}{n} \wedge a=\frac{m_1}{n_1}$; пусть $b=\frac{s}{t} \wedge b=\frac{s_1}{t_1}$, $a-b=\frac{m}{n}-\frac{s}{t} \wedge a-b=\frac{m_1}{n_1}-\frac{s_1}{t_1}$, $\frac{m}{n}-\frac{s}{t} \sim \frac{m_1}{n_1}-\frac{s_1}{t_1}$	
Теорема	Разность рациональных чисел всегда существует и притом единственная $(\forall a,b \in \boldsymbol{Q})(\exists!\, c \in \boldsymbol{Q})[c=a-b]$	Доказательство: существование следует из определения разности и существования разности целых чисел. Докажем единственность. Пусть существует две разности с и c_1: с=a-b, c_1= a-b. По определению разности a=b+c, a=b+c_1, тогда b+c= b+c_1, то по свойству сократимости c=c_1	

Таблица 70. Умножение рациональных чисел

	Формулировка	**Запись**	**Примеры**
Определение	Пусть даны два рациональных числа a и b, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{s}{t}$, тогда произведением рациональных чисел a и b, называется рациональное число c, представленное дробью $\frac{ms}{nt}$	$a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t} = \frac{m \cdot s}{nt} = c$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$
Теорема	Произведение рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей	пусть $a = \frac{m}{n} \wedge a = \frac{m_1}{n_1}$; пусть $b = \frac{s}{t} \wedge b = \frac{s_1}{t_1}$, $a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t} \wedge a \cdot b = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{s_1}{t_1}$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t} \sim \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{s_1}{t_1}$	
свойства умножения	1.закон коммутативности	$(\forall a, b \in \boldsymbol{Q})[a \cdot b = b \cdot a]$	
	2.закон ассоциативности	$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[(a + b) + c = a + (b + c)]$	
	3.существование нейтрального элемента	$(\forall a \in \boldsymbol{Q})(\exists 1 \in \boldsymbol{Q})[a \cdot 1 = 1 \cdot a = a]$	
	4.существование симметричного элемента	$(\forall a \in \boldsymbol{Q})(\exists \frac{1}{a} \in \boldsymbol{Q})[a \neq 0 \wedge a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1]$	
	5.закон сократимости (в одну сторону)	$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[a = b \wedge c \neq 0 \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c)]$	
	6.закон монотонности (в одну сторону)	$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[a > b \wedge c > 0 \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c)]$	
		$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[a > b \wedge c < 0 \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c)]$	
	7.дистрибутивные законы	$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)]$	
		$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)]$	
замечание	число $\frac{1}{a}$ называется обратным числу a если $a = \frac{m}{n}$, то $\frac{1}{a} = \frac{n}{m}$		

Таблица 71. Пример доказательства свойства умножения рациональных чисел

$$(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q})[(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c)]$$

Пусть $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}, c = \frac{s}{t}$

Выпишем левую часть: $(a+b)\cdot c = \left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{s}{t} \overset{\text{по определению сложения рац.чисел}}{\cong} \frac{mq+pn}{nq}\cdot\frac{s}{t} \overset{\text{по определению умножения рац.чисел}}{\cong} \frac{(mq+pn)\cdot s}{(nq)\cdot t} \overset{\text{по дистрибутивному зак. умн. целых чисел}}{\cong}$

$= \frac{(mq)s+(pn)s}{(nq)t} \overset{\text{по опр.сложения рац.чисел}}{\cong} \frac{(mq)s}{(nq)t}+\frac{(pn)s}{(nq)t} \overset{\textit{по опр.умн.раци чисел}}{\cong} \frac{mq}{nq}\cdot\frac{s}{t}+\frac{pn}{nq}\cdot\frac{s}{t} \overset{\textit{по осн.св.дроби.}}{\cong} \frac{m}{n}\cdot\frac{s}{t}+\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{t} = a\cdot c + b\cdot c.$

Таблица 72. Деление рациональных чисел

	Формулировка	**Запись**	**Примеры**
Определение	частным чисел двух рациональных чисел a и b, называется такое рациональное число c, что a=bc		
Определение	Пусть даны два рациональных числа a и b, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{s}{t}$, тогда частным рациональных чисел a и b, называется рациональное число c, представленное дробью $\frac{mt}{ns}$	$a : b = \frac{m}{n} : \frac{s}{t} = \frac{m\cdot t}{n\cdot s} = c$	$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
правило	Для того, чтобы разделить рациональное число достаточно делимое умножить на число обратное делителю		
теорема	Частное рациональных чисел a и b, если $b≠0$ существует и притом единственное	$(\forall a, b \in \boldsymbol{Q})(\exists!\, c \in \boldsymbol{Q})[c = a : b]$	

Таблица 73. Множество рациональных чисел как расширение множества целых чисел

1. $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$	Пусть даны два целых числа m и n. Можно установить биективное отображение (взаимно-однозначное соответствие) между дробью и целым числом: $\frac{m}{1} \leftrightarrow m, \frac{n}{1} \leftrightarrow n$.
2. Действия сложения, вычитания, умножения выполнимые во множестве целых чисел выполнимы во множестве рациональных чисел, но по новым правилам	Пусть m и n *–целые числа*, тогда $m + n = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \frac{m+n}{1} = m + n$ $$m - n = \frac{m}{1} - \frac{n}{1} = \frac{m - n}{1} = m - n$$ $$m \cdot n = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{m \cdot n}{1 \cdot 1} = m \cdot n$$
3. Во множестве **Q** всегда выполняется (кроме деления на 0) операция деления, которая не всегда выполнима во множестве **Z**	Черта в записи дроби $\frac{m}{n}$ может рассматриваться как знак деления $$m:n = \frac{m}{1}:\frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m \cdot 1}{1 \cdot n} = \frac{m}{n}$$
	Любую неправильную дробь можно представить либо в виде целого числа, либо в виде смешанного числа (целой и дробной частей) пусть $\frac{m}{n}$ -неправильная дробь, тогда $m>n$. Если m кратно n, то в этом случае данная дробь есть запись целого числа. Если m не кратно n, то разделим m на n с остатком: $m=nq+r$, где $r<n$ $$\frac{m}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$$ $$\frac{17}{3} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{3} = \frac{3 \cdot 5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{1} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$$
4. Множество **Q** есть минимальное расширение множества **Z**	Между множествами целых и рациональных чисел нет других множеств, удовлетворяющих условиям 1-3

Таблица 74. Отношения порядка в Q. Свойства множества рациональных чисел.

	Формулировка	Запись
Определение	Рациональное число a больше рационального числа b тогда и только тогда, когда существует такое рациональное число c, что верно равенство: a=b+c	$(\forall a,b \in \mathbf{Q})(\exists c \in \mathbf{Q})[a > b \Leftrightarrow a = b + c]$
Свойства отношения «>»	антирефлексивность	$(\forall a,b \in \mathbf{Q})[\overline{a > a}]$
	ассиметричность	$(\forall a,b \in \mathbf{Q})[a > b \Rightarrow \overline{b > a}]$
	транзитивность	$(\forall a,b,c \in \mathbf{Q})[a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c]$

Свойства множества Q

1)	Множество **Q** линейно упорядоченно отношением «больше»	$(\forall a,b \in \mathbf{Q})[\textit{либо } a > b \textit{ либо } b > a \textit{ либо } \ a = b]$
2)	Во множестве **Q** нет наименьшего элемента	$(\forall a \in \mathbf{Q})(\exists b \in \mathbf{Q})[b < a]$
3)	Во множестве **Q** нет наибольшего элемента	$(\forall a \in \mathbf{Q})(\exists b \in \mathbf{Q})[b > a]$
4)	Множество **Q** – плотно в себе	$(\forall a,b \in \mathbf{Q})(\exists c \in \mathbf{Q})[a < c < b]$ доказательство: пусть дано два рациональных числа a и b, среднее арифметическое этих чисел имеет вид $\frac{a+b}{2} = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right):2 = \frac{mq+pn}{nq}:\frac{2}{1} = \frac{mq+pn}{nq} \cdot \frac{1}{2} = \frac{mq+pn}{2nq} \in \mathbf{Q}$ $a < \frac{a+b}{2} < b$
5)	Множество **Q** есть расширение множества **Z**	1) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, т.к. всякое целое число представимо виде дроби $\frac{m}{1}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$ 2) Отношения «равно», «меньше», «больше», операции сложения, вычитания, умножения, выполнимые во множестве **Z**, также выполнимы во множестве **Q,** но с новым смыслом как с рациональными числами 3) Во множестве **Q** выполнима операция деления (кроме деления на 0), которая не всегда выполнима во множестве **Z.** 4) Множество **Q** есть минимальное расширение множества **Z**.