Лекция

Тема: «Делимость во множестве целых неотрицательных чисел»

План.

1. Отношение делимости натуральных чисел и его свойства
2. Теоремы о делимости
3. Признаки делимости

Литература:

1. Евтыхова Н.М. Математика в таблицах и схемах для студентов 2 курса факультета педагогики и психологии / Н.М. Евтыхова - Майкоп, 2019.изд 2-е – исправленное и дополн.-118 с. - (С.67-70 (таблицы 45-47))

2. Стойлова, Л.П. Математика: учеб. для студентов учреждений высш. образования / Л.П. Стойлова. – 4-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 464 с. (С. 335-339)

3. Математика. Сборник задач: учеб.пособие для студ.учреждений высш.проф.образования/[Л.П.Стойлова, Е.А.Конобеева, Т.А.Конобеева, И.В.Шадрина]. – 2-е изд.,стер. – М.: изд.центр «Академия», 2013. – 240с. (С.142-145)

Таблица 45. Отношение делимости натуральных чисел и его свойства

	формулировка	запись	примеры, доказательство
Определение	Натуральное число *a* делится (кратно) на натуральное число *b*, тогда и только тогда когда найдется такое натуральнее число *c* что справедливо равенство: $a=b\cdot c$	$(\forall a,b\in N)[a \vdots b \Leftrightarrow (\exists c\in N)a=b\cdot c]$	$12 \vdots 4,\text{т. к.}(\exists 3\in N)12=4\cdot 3]$
свойство рефлексивности	Всякое натуральное число делится само на себя	$(\forall a\in N)[a \vdots a]$	$a \vdots a,\text{т. к.}(\exists 1\in N)a=a\cdot 1]$
свойство антисимметричности	Если натуральное число *a* делится на натуральное число *b* и натуральное число *b* делится на натуральное число *a*, то $a=b$	$(\forall a,b\in N)[a \vdots b \land b \vdots a \Rightarrow a=b]$	$a \vdots b \Leftrightarrow (\exists c\in N)a=b\cdot c$ и $b \vdots a \Leftrightarrow (\exists q\in N)b=a\cdot q$ подставим значение *b* из второго равенства в первое: $a=(aq)\cdot c=a(qc)$, т.к. $q\in N, c\in N$,то $q\cdot c\in N$, значит $q=1$и $c=1$, тогда $b=a\cdot 1=a$
свойство транзитивности	Если натуральное число *a* делится на натуральное число *b* и натуральное число *b* делится на натуральное число *c*, то *a* делится на *c*	$(\forall a,b,c\in N)[a \vdots b \land b \vdots c \Rightarrow a \vdots c]$	$a \vdots b \Leftrightarrow (\exists p\in N)a=b\cdot p$ и $b \vdots c \Leftrightarrow (\exists q\in N)b=c\cdot q$ подставим значение *b* из второго равенства в первое: $a=(cq)\cdot p=c(qp)$, т.к. $q\in N, p\in N$,то $q\cdot p\in N$, тогда по определению $a \vdots c$
	Если натуральное число *a* делится на натуральное число *b*, то $a\geq b$	$(\forall a,b\in N)[a \vdots b \Rightarrow a\geq b]$	$a \vdots b \Leftrightarrow (\exists c\in N)a=b\cdot c$, тогда $a=\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c\ \text{слагаемых}}=$ $=b+\underbrace{b\cdot(c-1)}_{k}=b+k$, тогда по определению «больше» $a\geq b$

Таблица 46. Теоремы о делимости

	Формулировка	Запись	
	0 делится на любое натуральное число	$(\forall a \in N)[0 \vdots a]$	$0 \vdots a \Rightarrow (\exists c \in N_0) 0 = a \cdot c \Rightarrow c = 0$
теорема 1 о делимости суммы	Если каждое слагаемое суммы натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на натуральное число b, то и вся сумма $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ делится на это число	$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b \in N)[a_1 \vdots b \wedge a_2 \vdots b \wedge \dots \wedge a_n \vdots b \Rightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \vdots b$	
теорема 2 о делимости разности	Если натуральные числа a и b делятся на натуральное число c, то разность a-b делится на c	$(\forall a, b, c \in N)[a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow (a - b) \vdots c]$	
теорема 3 о делимости произведения	Если хотя бы один из множителей произведения натуральных чисел a или b делится на c, то и все произведение делится на число c	$(\forall a, b, c \in N)[a \vdots c \vee b \vdots c \Rightarrow (a \cdot b) \vdots c]$	
теорема 4 о неделимости суммы	Если каждое слагаемое суммы натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ делится на натуральное число b, а одно слагаемое p не делится на число b то и вся сумма $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + p)$ не	$(\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b, p \in N)[a_1 \vdots b \wedge a_2 \vdots b \wedge \dots \wedge a_n \vdots b \wedge \overline{p \vdots b} \Rightarrow \overline{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + p) \vdots b}$	

	делится на это число	
Следствие 1 о делимости произведения	Если в произведении натуральных чисел a и b число a делится на c, а число b делится на число p то произведение $a \cdot b$ делится на число $c \cdot p$	$(\forall a, b, c, p \in N)[a \vdots c \wedge b \vdots p \Longrightarrow (ab) \vdots (cp)]$
Следствие 2 о делимости произведения	Если произведение $a \cdot c$ делится на число b $c,$ и c – натуральное число то a делится на число b	$(\forall a, b, c \in N)[ac \vdots bc \Longrightarrow a \vdots b$

Таблица 47. Признаки делимости

	Формулировка	Запись	Примеры
Определение	Признак делимости – это правило, с помощью которого можно определить делится ли данное число *a* на число *b*, не производя самого деления		
Признак делимости на 2	Целое неотрицательное число *x* делится на 2 тогда и только тогда, когда его десятичная запись оканчивалась на 0 или 2 или 4 или 6 или 8.	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 = 2 \vee a_0 = 4 \vee a_0 = 6 \vee a_0 = 8]$	$34\underline{2} \vdots 2$ $75\underline{0} \vdots 2$ $1234\underline{8} \vdots 2$
Признак делимости на 5	Целое неотрицательное число *x* делится на 5 тогда и только тогда, когда его десятичная запись оканчивалась на 0 или 5	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 = 2 \vee a_0 = 5]$	$34\underline{5} \vdots 5$ $36458\underline{0} \vdots 5$
Признак делимости на 3	Целое неотрицательное число *x* делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится на 3	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 3]$	$345 \vdots 3$, т. к. $3 + 4 + 5 = 12$ и $12 \vdots 3$
Признак делимости на 9	Целое неотрицательное число *x* делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится на 9	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 9]$	$12348 \vdots 9$ 1+2+3+4+8=18 $18 \vdots 9$
Признак делимости на 4	Целое неотрицательное число *x* делится на 4 тогда и только тогда, когда его две последние цифры его десятичной записи образуют двузначное число, которое делится на 4	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 4 \Leftrightarrow (a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 4]$	$123\underline{48} \vdots 4$, $48 \vdots 4$, $1\underline{22} \vdots 4$,
Признак делимости на 25	Целое неотрицательное число *x* делится на 25 тогда и только тогда, когда его две последние цифры его десятичной записи образуют двузначное число, которое делится на 25	$(\forall x \in N_0)[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 25 \Leftrightarrow (a_1 \cdot 10 + a_0) \vdots 25]$	$12\underline{00} \vdots 25$ $37\underline{25} \vdots 25$ $10\underline{20} \vdots 25$

Докажем признак делимости на 3.

$(\forall x \in \boldsymbol{N_0})[x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 3]$

Докажем необходимость ($\Rightarrow$): по условию $x \vdots 3$, докажем, что $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 3$

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \overset{\text{прибавим и вычтем сумму цифр десятичной записи числа } x}{\triangleq}$$

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \overset{\text{по правилу вычитания}}{\triangleq}$$

$$(a_n \cdot 10^n - a_n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}) + \dots + (a_2 \cdot 10^2 - a_2) + (a_1 \cdot 10 - a_1) + (a_0 - a_0) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \overset{\text{по правилу умножения разности на число}}{\triangleq}$$

$$a_n \cdot \underbrace{(10^n - 1)}_{\substack{99\dots9 \\ n\ 9-\text{ок}}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{(10^{n-1} - 1)}_{\substack{99\dots9 \\ (n-1)\ 9-\text{ок}}} + \dots + a_2 \cdot \underbrace{(10^2 - 1)}_{99} + a_1 \cdot \underbrace{(10 - 1)}_{9} + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) =$$

$$[a_n \cdot \underbrace{99\dots9}_{n\ 9-\text{ок}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n-1\ 9-\text{ок}} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9] + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = x - [a_n \cdot \underbrace{99\dots9}_{n\ 9-\text{ок}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n-1\ 9-\text{ок}} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9]$$

Рассмотрим слагаемые в квадратных скобках. Каждое слагаемое есть произведение вида $a_i \cdot \underbrace{99\dots9}_{i\ 9-\text{ок}}$, где i=1,2,3,…,n

Числа, записанные девятками, делятся на 3, т.к. существуют числа вида $\underbrace{33\dots3}_{i\ 3-\text{ек}} \cdot 3$. по теореме о делимости произведения каждое слагаемое вида $a_i \cdot \underbrace{99\dots9}_{i\ 9-\text{ок}}$ делится на 3. По теореме о делимости суммы: $[a_n \cdot \underbrace{99\dots9}_{n\ 9-\text{ок}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n-1\ 9-\text{ок}} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9] \vdots 3$.

Т.к. $x \vdots 3$ по условию, то по теореме о делимости разности, $(x - [a_n \cdot \underbrace{99\dots9}_{n\ 9-\text{ок}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n-1\ 9-\text{ок}} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9]) \vdots 3$, значит

$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 3$.

Докажем достаточность($\Leftarrow$):теперь дано, что $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \vdots 3$, нужно доказать, что $x \vdots 3$. На основе вышеприведенных преобразований $x = [a_n \cdot \underbrace{99\dots9}_{n\ 9-\text{ок}} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\dots9}_{n-1\ 9-\text{ок}} + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9] + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$. Остается воспользоваться теоремой о делимости суммы и становится очевидным, что $x \vdots 3$.

Признак делимости Паскаля

$$(\forall x, b \in \boldsymbol{N_0}) x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \wedge x \vdots b \Leftrightarrow (a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \dots + a_1 \cdot r_1 + a_0) \vdots b,$$

где $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$ - остатки от деления на b разрядных единиц 10, 10^2, 10^3,…,10^n

Например, **признак делимости на 7**:

	10:7=1(ост.3)	$10=7\cdot1+3$	$\boldsymbol{r_1=3}$
$10\cdot r_1=10\cdot3=30$	30:7=4(ост.2)	$30=7\cdot4+2$	$r_2=2$
$10\cdot r_2=10\cdot2=20$	20:7=2(ост.6)	$20=7\cdot2+6$	$r_3=6$
$10\cdot r_3=10\cdot6=60$	60:7=8(ост.4)	$60=7\cdot8+4$	$r_4=4$
$10\cdot r_4=10\cdot4=40$	40:7=5(ост.5)	$40=7\cdot5+5$	$r_5=5$
$10\cdot r_5=10\cdot5=50$	50:7=7(ост.1)	$50=7\cdot7+1$	$r_6=1$
$10\cdot r_6=10\cdot1=10$	10:7=1(ост.3)	$10=7\cdot1+3$	$\boldsymbol{r_7=3}$

$a_7 \cdot 3 + a_6 \cdot 1 + a_5 \cdot 5 + a_4 \cdot 4 + a_3 \cdot 6 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 3 + a_0$

Например: число 48916: $6+1\cdot3+9\cdot2+8\cdot6+4\cdot4=6+3+18+48+16=91$, 91:7=13(ост.0), т.е. $91 \vdots 7$, значит $48916 \vdots 7$

Признак делимости на 11:

100:11=9 (ост.1),
10^3:11=1000:11=90 (ост.10)
10^4:11=10000:11=909(ост.1)
10^5:11=100000:11=9090(ост.10)
10^4:11=1000000:11=90909(ост.1)

нетрудно видеть, что остатки либо 1, либо 10

Т.о. если разбить все цифры числа на 2 группы — через одну цифру (в одну группу попадут все цифры с нечётными позициями, в другую — с чётными), сложить все цифры в каждой группе и вычесть одну полученную сумму из другой, то остаток от деления на 11 результата будет такой же, что и у первоначального числа.

Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой чисел, стоящих на четных местах и суммой чисел, стоящих на нечетных местах делится на 11.