АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ADYGHE STATE UNIVERSITY

Математика для всех

Лекция 6
Матричная алгебра

Дергачёв Евгений Андреевич

Институт точных наук и цифровых технологий
Кафедра алгебры и геометрии

Матрица

Матрица – прямоугольная таблица чисел,

содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ - размер матрицы.

$A = (a_{ij})$ сокращенная запись,

a_{ij} - элемент матрицы,

i - номер строки,

j - номер столбца.

Особые виды матриц

Квадратная матрица – число строк равно числу столбцов.

Главная диагональ – элементы матрицы, стоящие на диагонали,

идущей из верхнего угла.

Единичная матрица – все элементы главной диагонали раны единицы.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

Нулевая матрица – все элементы равны нулю.

Вектор–матрица – матрица, содержащая один столбец или одну строку.

$v = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Действия над матрицами

1) ***Сложение*** (для матриц одинаковых размеров)

Суммой двух матриц называется матрица

$C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая что $\boldsymbol{c_{ij}}$=$\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

2) ***Вычитание***

Разностью двух матриц называется матрица

$C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая что $\boldsymbol{c_{ij}}$=$\boldsymbol{a_{ij}} - \boldsymbol{b_{ij}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

3)***Умножение на число***

Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ на число к называется

матрица $B = (b_{ij})$ такая, что $\boldsymbol{b_{ij}}$=$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a_{ij}}$, i = $\overline{1,m}$, j = $\overline{1,n}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

4) ***Произведение*** (рассматривается для случая: число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на

матрицу $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$

называется матрица $\mathrm{C}_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$такая, что

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1\text{к}} + a_{i2} \cdot b_{2\text{к}} + a_{i3} \cdot b_{3\text{к}} + \ldots + a_{in} \cdot b_{n\text{к}}$

Определитель матрицы

Квадратной матрицы A порядка n можно сопоставить число det A (Δ),

которое называется определителем

1. $n = 1 \quad A = (a_1) \qquad \Delta = a_1$

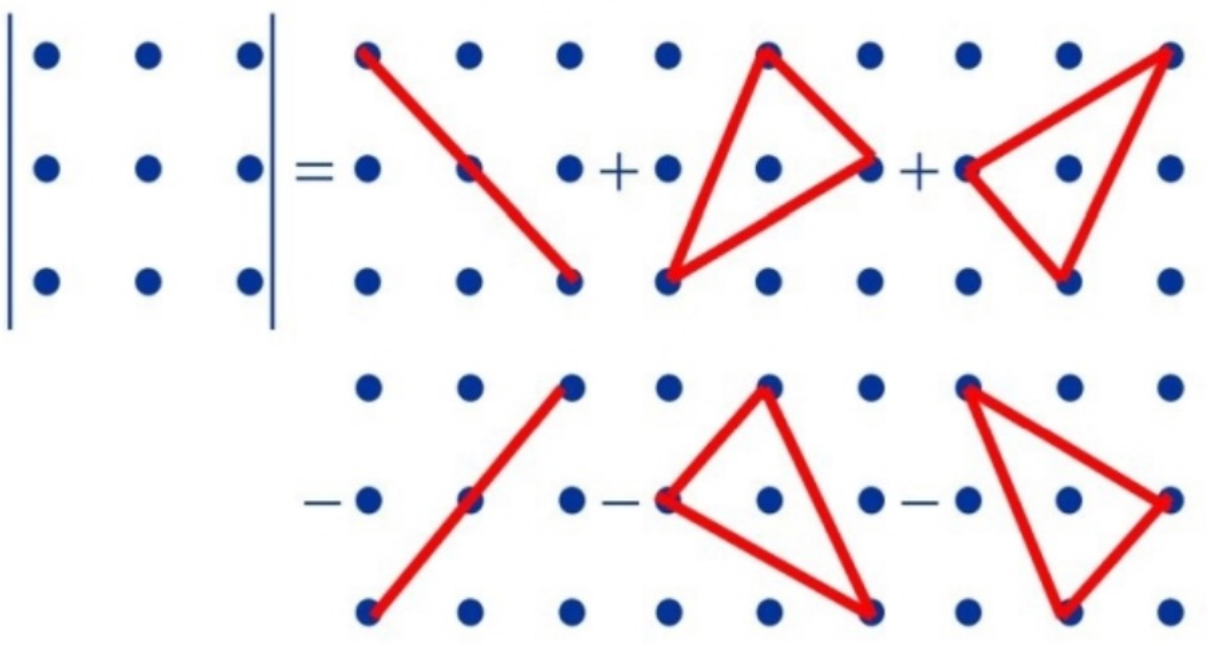
2. $n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. $n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

Определитель третьего порядка



Решение задач

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матрицы A на число k.

A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, k=2.

Пример 3. Даны две матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислить произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если это возможно.

Пример 4. Даны две матрицы А $=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, В$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Вычислить произведение $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Пример 5. Вычислить определитель матрицы А$=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Пример 6. Вычислить определитель матрицы А$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Системы уравнений

Система уравнений общего вида

Система линейных уравнений с неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + \ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных,

b_i - свободные члены,

i – номер уравнения,

j – номер неизвестного.

Метод определителей

1. Составить главный определитель из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Составить вспомогательные определители путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ b_n & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \dots & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \end{vmatrix}$$

3. Если главный определитель не равен нулю, то решение системы находиться по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots . \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Пример. Найти решение системы уравнений по методу Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Пример. Найти решение системы уравнений по методу Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$