Теория чисел

При сложении, вычитании и умножении натуральных чисел обязательно получается натуральное число. А вот при делении двух натуральных чисел может получиться или натуральное число, или дробь.

$20 : 5 = 4$. Результат — число натуральное. Поскольку все натуральные числа — целые, говорят, что 20 **делится нацело** на 5 или что 20 **кратно** 5 — эти термины являются синонимами.

При делении 20 на 8 целое число не получается. Значит, 20 не делится нацело на 8 и 20 не кратно 8.

Способность числа m делиться нацело на число n называют **делимостью.**

Число n при этом называется **делителем** числа m, а число m — **кратным** числа n.

Число 5 — это делитель числа 20, а число 20 — это кратное числа 5.

Чтобы не путать делимость с делением, её обозначают тремя вертикальными точками «$\vdots$» или вертикальной чертой «$|$».

> Пусть m — кратное, n — делитель.
>
> $m \vdots n$ — «m **делится** на n нацело»
>
> или
>
> $n \mid m$ — «n **делит** m».

Со знаком «делится» порядок записи такой: сначала кратное, потом делитель (как в обычном делении). Например: $20 \vdots 5$.

Со знаком «делит» порядок обратный: сначала делитель, потом кратное. Например: $5 \mid 20$.

180 делится на 10, значит, $180 \vdots 10$.

А число 18 является делителем 180, то есть 18 делит 180. В переводе на математический: $18 \mid 180$.

Упражнение 1

1) Как правильно записать выражение «28 делит 56»

28 56 $\vdots$ $|$

2) Как правильно записать выражение «56 делится на 28»

$|$

$56 \vdots 28$

В этот раз нужны три точки.

Как найти делители и кратные

Если Ник выпьет чайник кофе, он может решить все задачи махом, то есть оставить список неделимым. Но лучше обойтись без экстрима. Ещё Ник может решать всего по одной задаче в день, разделив список на 150 частей. Правда, тогда он ничего не успеет 🐌

Любое натуральное число делится на само себя и на единицу, поэтому в список делителей 150 можно добавить 1 и 150.

$k \vdots k$ или $k|k$

$k \vdots 1$ или $1 \mid k$

На что ещё делится 150? Чтобы это понять, можно пробовать делить на все числа по порядку и записывать делители парами:

Делители числа 150

Проверка делимости	Нотация	Описание
$150 : 1 = 150$	$1 \mid 150,\ 150 \mid 150$ $150 \vdots 1,\ 150 \vdots 150$	150 делится на 1 и 150
$150 : 2 = 75$	$2 \mid 150,\ 75 \mid 150$ $150 \vdots 2,\ 150 \vdots 75$	150 делится на 2 и 75
$150 : 3 = 50$	$3 \mid 150,\ 50 \mid 150$ $150 \vdots 3,\ 150 \vdots 50$	150 делится на 3 и 50
$150 : 5 = 30$	$5 \mid 150,\ 30 \mid 150$ $150 \vdots 5,\ 150 \vdots 30$	150 делится на 5 и 30
$150 : 6 = 25$	$6 \mid 150,\ 25 \mid 150$ $150 \vdots 6,\ 150 \vdots 25$	150 делится на 6 и 25
$150 : 10 = 15$	$10 \mid 150,\ 15 \mid 150$ $150 \vdots 10,\ 150 \vdots 15$	150 делится на 10 и 15

На $4, 7, 8, 9$ число 150 не делится, поэтому в таблице их нет. Следующий после 10 делитель равен $15, 150 : 15 = 10$... Стоп, 10 и 15 уже были. Чем больше делитель, тем меньше частное (и наоборот). Разделив на половину делителей, можно получить вторую их половину. А значит, продолжать деление нет смысла — числа и дальше будут повторяться.

Запишем все делители в том порядке, в каком они встретились: $\{1, 150, 2, 75, 3, 50, 5, 30, 6, 25, 10, 15\}$.

Упорядочим их по возрастанию:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}.$$

Количество делителей любого числа ограничено. При делении на самое маленькое всегда получается самое большое. При делении на 2 получается второй по величине делитель — половина числа.

Ни один делитель числа, кроме него самого, не может быть больше его половины.

Упражнение 2

1) Выберите вариант, где записаны только делители числа 70.

- ○ $1, 7, 15$
- ○ $7, 10, 35$
- ○ $2, 5, 40$
- ○ $70, 140, 210$

Проверить

А что с кратными? Для их получения тоже нужны числа по порядку, начиная с единицы. Только в этот раз на эти числа надо умножать, а не делить.

$150 \cdot 1 = 150$

$150 \cdot 2 = 300$

$150 \cdot 3 = 450$

...

Количество натуральных чисел бесконечно, значит, и **количество кратных любого числа бесконечно**.

Упражнение 3

Выберите верные утверждения про число 30.

- [ ] Наименьшее натуральное кратное числа 30 равно ему самому.
- [ ] $30 \vdots 12$.
- [ ] $7|30$
- [ ] Среди чисел от 16 до 29 нет ни одного делителя тридцати.
- [ ] $5 \vdots 30$.
- [ ] 10 — делитель 30.
- [ ] 60, 90 и 120 кратны 30.

Свойства делимости

У делимости есть ещё два интересных свойства.

1) Если первое число делится на второе, а второе на первое, то эти числа равны.

Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $a = b$.

2) Если число m делится на число n, а число n делится на число k, то число m делится на число k.

Например, число 150 делится на 30, а 30 делится на 10. Значит, 150 тоже должно делиться на 10.

Так и есть! $150 : 10 = 15$.

Если $m \vdots n$ и $n \vdots k$, то $m \vdots k$

Можно и в обратную сторону. Если k делит n, а n делит m, то k делит m.

Проверим: 10 делит 30, $30 : 10 = 3$. При этом 30 делит 150, $150 : 30 = 5$. Значит, 10 делит 150, $150 : 10 = 15$.

Если $k | n$ и $n | m$, то $k | m$

Признаки делимости

Вот признак делимости на 10: **число делится на 10, если его последняя цифра равна 0.**

Похожие признаки делимости есть для чисел 2 и 5.

Число делится на 2, если его последняя цифра $0, 2, 4, 6$ или 8. Также можно сказать, что его последняя цифра должна делиться на 2. Такие числа называют **чётными**. Если число не делится на 2, то оно **нечётное**.

Число делится на 5, если его последняя цифра равна 0 или 5, то есть последняя цифра делится на 5.

Свои признаки делимости есть и у квадратов этих чисел: $4, 25, 100$.

Признак	Пример
Число делится на 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4.	1416 делится на 4 (так как 16 делится на 4), а 1522 — нет.
Число делится на 25, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 25.	Это сочетания цифр 00, 25, 50 или 75.
Число делится на 100, если две его последние цифры — нули.	1300 делится на 100, а 130 — нет.

Похожие признаки — у чисел $8, 125$ и 1000 (они же — третьи степени чисел $2, 5, 10$). Только тут нужно смотреть на последние три цифры.

Признак	Пример
Число делится на 8, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 8.	3784 делится на 8 (так как $784 : 8 = 98$), а $12\ 146$ – нет.
Число делится на 125, если три его последние цифры образуют число, которое делится на 125.	Это сочетания цифр 000, $125, 250, 375, 500, 625, 750$ или 875.
Число делится на 1000, если три его последние цифры — нули.	5000 делится на 1000, а 5500 – нет.

Признаки делимости работают только в одну сторону. Например, если число делится на 4, оно обязательно делится на 2. Но не наоборот! Если число делится на 2, оно не всегда делится на 4.

Например, 18 кратно 2, но не кратно 4. Или: 4 делится на 2, но 2 не делится на 4.

Упражнение 5

Даны числа $700, 123, 212, 450, 75, 64, 128, 400, 146, 56, 15$.

Сколько из них делятся на 4?

...

Сколько из них делятся на 25?

...

Сколько из них делятся на 100?

...

Задача 1

Число a делится на b. Выберите все верные утверждения.

- [ ] a делится на b нацело
- [ ] b всегда делится на a
- [ ] a можно представить в виде произведения b и некоторого натурального числа k
- [ ] a делит b
- [ ] Математически это записывается в виде $a \vdots b$