АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ADYGHE STATE UNIVERSITY

Математика для всех

Семинар 4
Вероятность

Карпенко Юрий Александрович

Институт точных наук и цифровых технологий
Кафедра алгебры и геометрии

Зачем изучать вероятности?

Теория вероятностей в жизни

Каков шанс выиграть в лотерею или вытянуть на экзамене именно тот билет, который успели выучить? Теория вероятностей позволяет оценить шансы возникновения случайных событий. Потому её и называют укрощением случайности.

Знание теории вероятностей помогает анализировать ситуацию и делать самостоятельные выводы на основе фактов. В современном мире, полном самой разной информации, эти навыки могут защитить вас от манипуляций и даже мошенничества.

Теория вероятностей в работе

Теория вероятностей необходима для проверки гипотез и построения точных прогнозов. Без знания теорвера не освоить статистику, а без статистики не вообразить работу любого специалиста по данным. Ни одно собеседование на должность аналитика данных или специалиста по Data Science не обойдётся без нескольких задач по теории вероятностей. Классические «задачи с собеседований» мы будем разбирать в этом модуле.

Здесь вы познакомитесь со всеми основными понятиями, необходимыми для более глубокого и профессионального освоения теории вероятностей. Модуль отлично подойдёт тем, кто никогда ещё не приступал к изучению теорвера.

Что важно знать?

Чтобы освоить материал этого модуля, нужно знать теорию множеств и комбинаторику. Если вы плохо помните эти разделы, советуем сначала пройти соответствующие модули в нашем тренажёре. Иначе в теорвере что-то может показаться непонятным или более сложным, чем есть на самом деле.

Будьте внимательны к терминам и обозначениям. Важно запоминать их и не путать между собой, чтобы не было трудностей с формулами, доказательствами и задачами. А в будущем знание терминов пригодится кому-то из вас и на собеседованиях.

Определения

Эксперимент

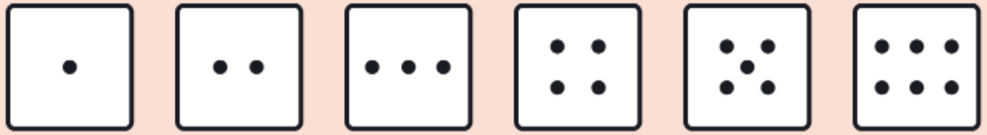
Подбрасывание кубика — это **эксперимент**. Выпавшее число очков — **исход** эксперимента. В эксперименте всегда происходит только один исход из всех возможных.

Пространство исходов — это множество всех исходов. Оно описывает все возможные варианты того, что может случиться в результате эксперимента. Обозначается буквой омега Ω.

Элементы Ω обозначаются строчными буквами омега $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, где n — количество исходов эксперимента.

Эксперимент

Пространство исходов



Обозначение

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

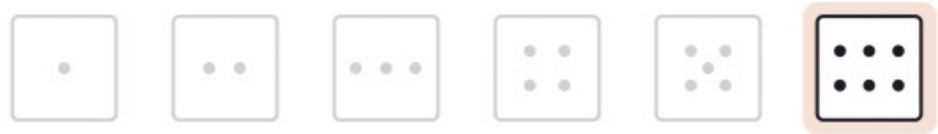
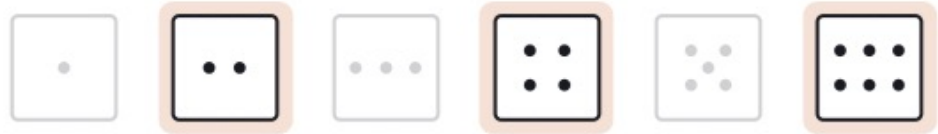
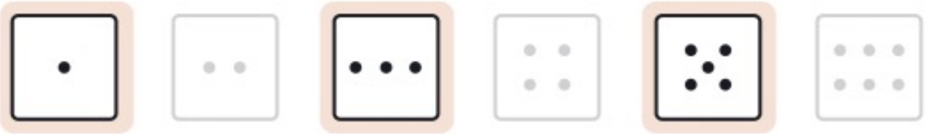
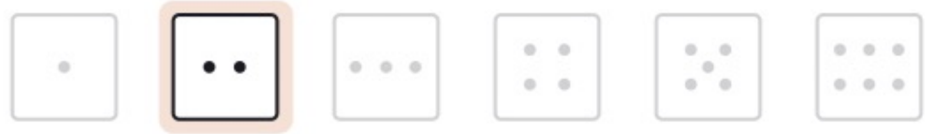
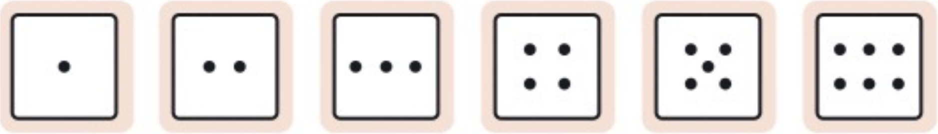
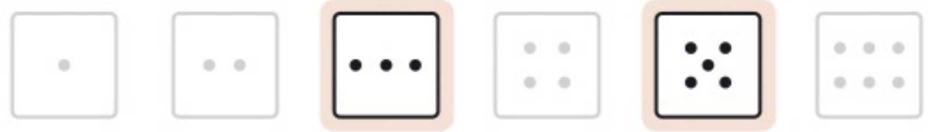
Для эксперимента с броском кубика пространство исходов $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Всего исходов шесть: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$, $\omega_5 = 5$, $\omega_6 = 6$. В нашем эксперименте номер исхода равен его значению, но так бывает не всегда.

Запись $\omega \in \Omega$ читается как «исход ω из пространства исходов Ω». Элементы ω могут быть словами или символами. Как и в любом другом множестве, перечислять исходы можно в каком угодно порядке.

Событие

Событие — это набор исходов случайного эксперимента, удовлетворяющий определённым условиям. Или, по-другому, подмножество Ω.

Событие

Событие	Множество исходов	Обозначение
Число очков больше 5		$\{6\}$
Число очков чётное		$\{2, 4, 6\}$
Число очков нечётное		$\{1, 3, 5\}$
Число очков равно 2		$\{2\}$
Число очков любое		$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Число очков равно 3 или 5		$\{3, 5\}$

Событие

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и так далее. Запись $A \subset \Omega$ читается как «событие A — подмножество пространства исходов Ω». Запись события через условие тоже встречается:

$$A = \{\text{ число очков на кубике чётное }\} = \{\omega \in \Omega : \ \omega \,\vdots\, 2\} = \{2, 4, 6\}.$$

Все те исходы ω, которые принадлежат событию A (то есть $\omega \in A$), называются **благоприятные исходы** для события A.

Для события «при броске выпало чётное число очков» благоприятные исходы — это элементы множества $\{2, 4, 6\}$. Тогда элементы множества $\{1, 3, 5\}$ — **неблагоприятные** исходы. Множество благоприятных событию исходов формально означает то же самое, что и само событие.

Упражнение 1

Эксперимент: один бросок кубика. Отметьте все варианты, где описаны исходы, благоприятные событию.

- [ ] Событие: выпавшее число очков меньше двух.

  Благоприятные исходы: число очков равно 1 или 2.

- [ ] Событие: выпавшее число очков делится на 3.

  Благоприятные исходы: число очков равно 3 или 6.

- [ ] Событие: выпавшее число очков равно пяти.

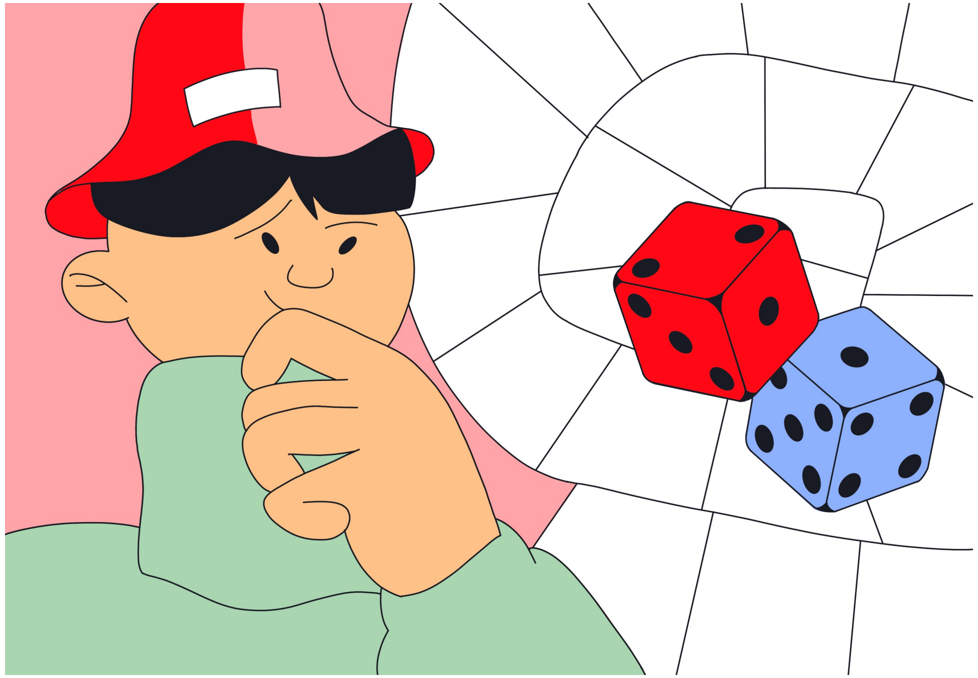
  Благоприятные исходы: число очков равно 5.

Пространство исходов

Два кубика

Пусть есть два игральных кубика разного цвета: синий и красный. Для эксперимента, в котором нужно бросить оба кубика, исход состоит из упорядоченной пары чисел. Например: $(1, 3)$, $(4, 2)$ или $(5, 5)$. Первое число пары соответствует числу очков на синем кубике, второе — на красном.

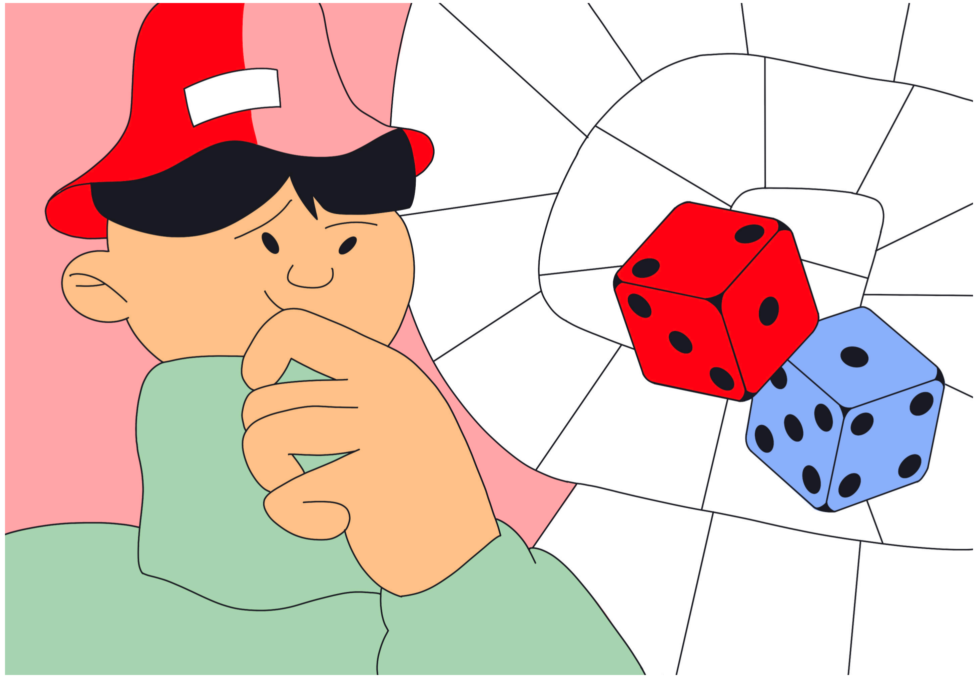
Событие: сумма очков делится на 4.



Два кубика

Событие: сумма очков делится на 4.

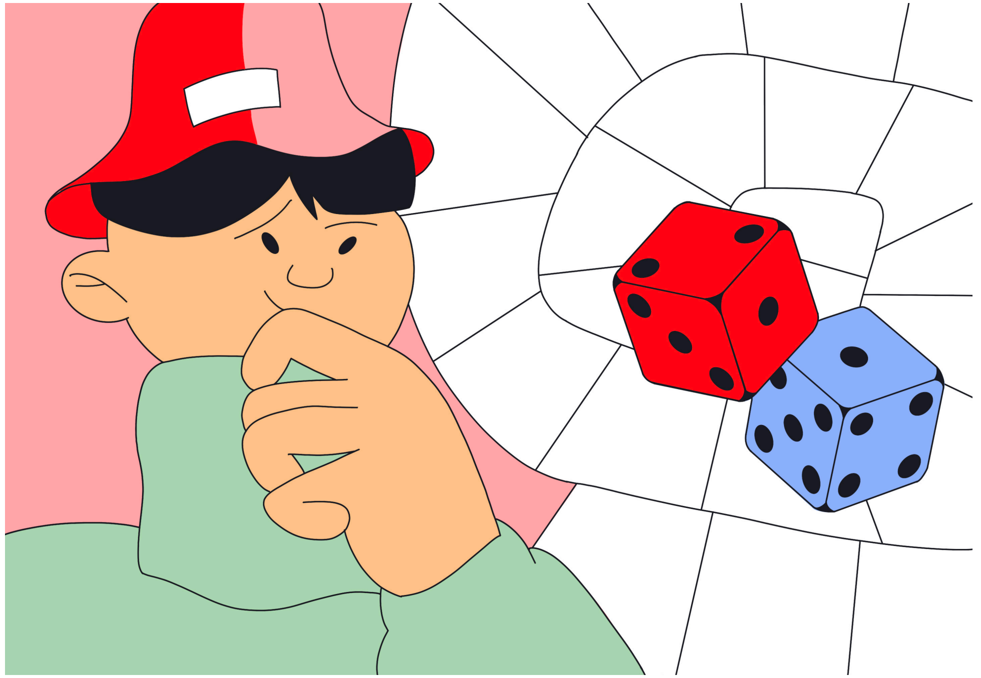
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Два кубика

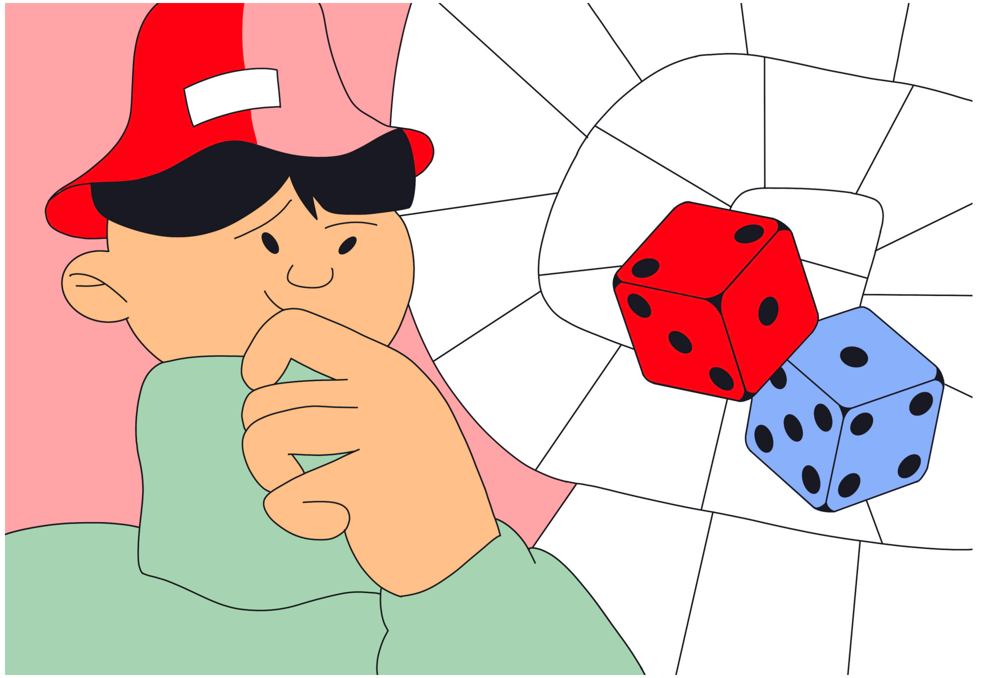
Событие: сумма очков делится на 4.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Событие: сумма очков делится на 4.

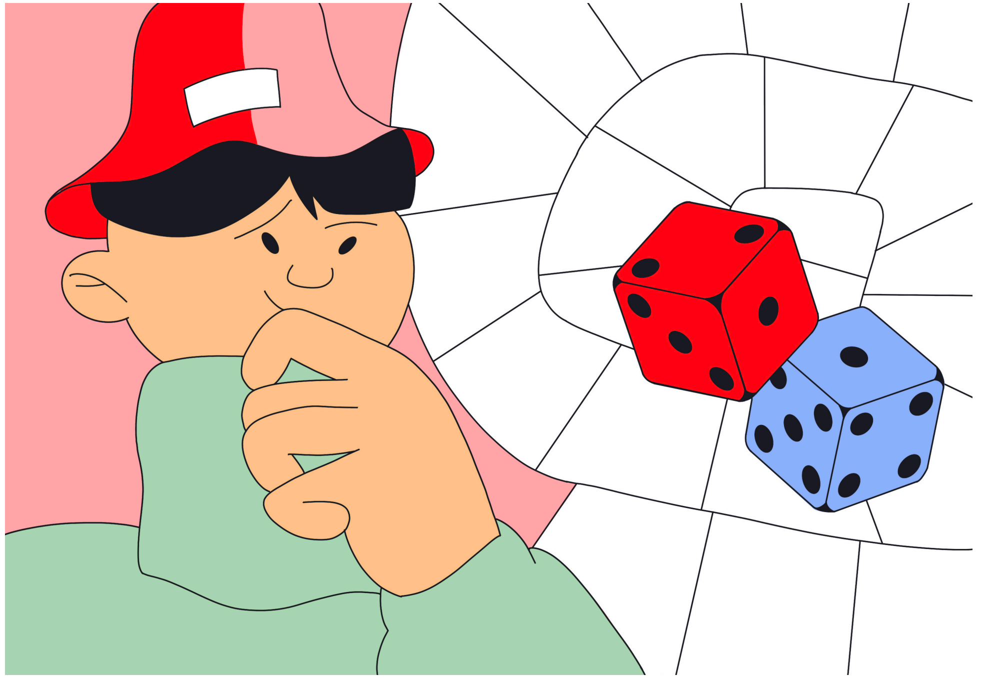
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Два кубика

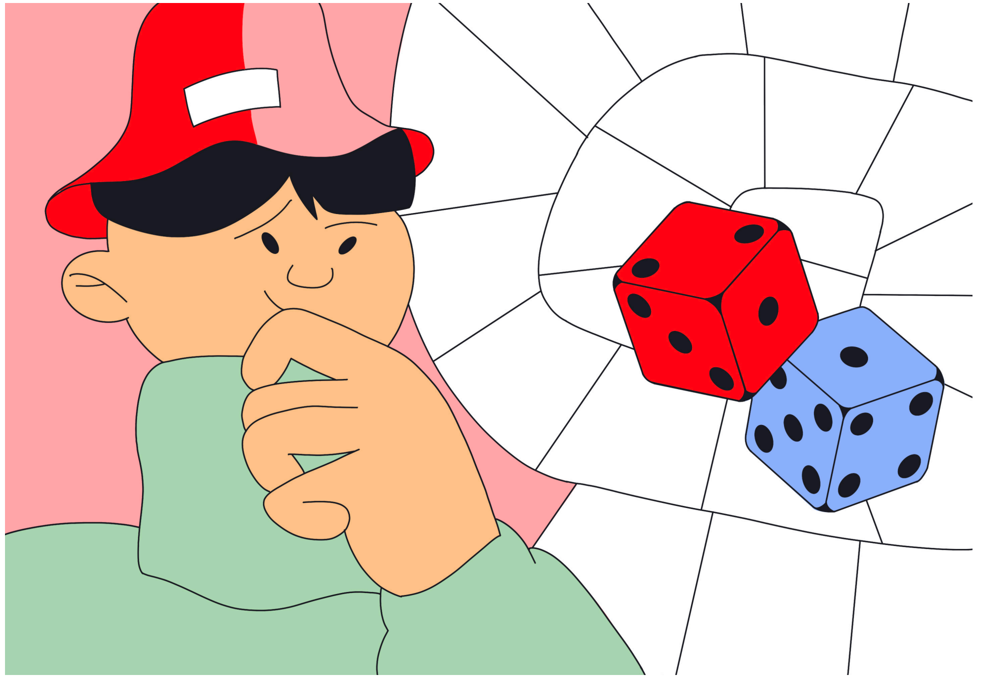
Событие: сумма очков делится на 4.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Событие: сумма очков делится на 4.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	**(1,3)**	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	**(2,6)**
⚂	**(3,1)**	(3,2)	(3,3)	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	**(5,3)**	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	**(6,2)**	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**



Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Упражнения 2

Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Упражнения 2

Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Упражнения 2

Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Упражнения 2

Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

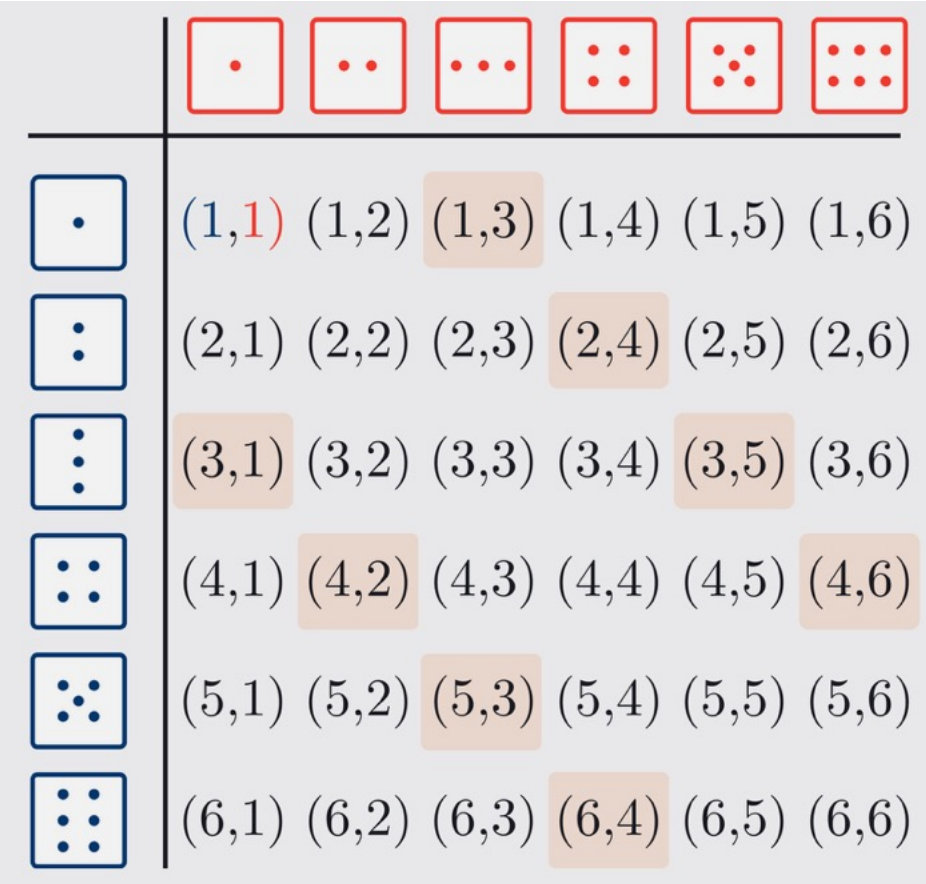
Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Сколько благоприятных исходов есть для каждого из описанных событий?



	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Сумма очков на двух кубиках равна 7.

На одном кубике выпало 3 очка, а на другом — больше 3.

Хотя бы на одном кубике выпало 5.

Разница очков на двух кубиках равна 2.

Упражнения 3

Эксперимент с броском двух цветных кубиков. Синий кубик считается первым, красный — вторым. Как могут выглядеть условия для события? Отметьте все верные варианты.

- [ ] Число очков с синего кубика делится нацело на число очков с красного.
- [ ] Произведение чисел очков на кубиках — простое число.
- [ ] Числитель дроби — число очков с синего кубика, а знаменатель — число очков с красного. Условие: полученная дробь — правильная. Напомним, что у правильной дроби модуль числителя меньше модуля знаменателя.

Эксперимент с броском двух цветных кубиков. Синий кубик считается первым, красный – вторым. Как могут выглядеть условия для события? Отметьте все верные варианты.

- [x] Число очков с синего кубика делится нацело на число очков с красного.

Для этого события много исходов. Например: $(4, 2)$, $(6, 3)$, а ещё все случаи, где число очков на кубиках одинаковое.

- [x] Произведение чисел очков на кубиках — простое число.

Произведение двух чисел будет простым, только если одно из них равно 1, а второе — простое, то есть 2, 3 или 5. Например, $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$.

- [x] Числитель дроби — число очков с синего кубика, а знаменатель — число очков с красного. Условие: полученная дробь — правильная. Напомним, что у правильной дроби модуль числителя меньше модуля знаменателя.

Упражнения 4

Определите количество благоприятных событию исходов.

Эксперимент: монету подбрасывают дважды.

Событие: решка выпала хотя бы один раз.

Эксперимент: бросок двенадцатигранника.

Событие: число очков делится на 5.

Эксперимент: из стандартной колоды в 54 карты вытягивают одну.

Событие: эта карта — король чёрной масти.

Эксперимент: бросок двух кубиков.

Событие: сумма очков равна 4.

Упражнения 4

Определите количество благоприятных событию исходов.

Эксперимент: монету подбрасывают дважды.
Событие: решка выпала хотя бы один раз.

3

Всего исходов четыре, но один не подходит: когда выпали два орла.

Эксперимент: бросок двенадцатигранника.
Событие: число очков делится на 5.

2

На 5 делятся 5 и 10 очков.

Эксперимент: из стандартной колоды в 54 карты вытягивают одну.
Событие: эта карта — король чёрной масти.

2

В стандартной колоде два короля чёрной масти: король пики и король трефы.

Эксперимент: бросок двух кубиков.
Событие: сумма очков равна 4.

3

$(1, 3)$, $(2, 2)$ и $(3, 1)$.

Невозможные, достоверные и случайные события

Определения

Событие называют **невозможным**, если оно заведомо не произойдёт в результате эксперимента.

Например, в условиях земного тяготения кубик при броске зависнет в воздухе. Такое событие не содержит ни одного исхода и соответствует пустому множеству: $A = \varnothing$. Шансы возникновения невозможных событий нулевые.

Событие называют **достоверным**, если оно обязательно произойдёт.

Например, в условиях земного тяготения кубик при броске упадёт. Такое событие совпадает с пространством исходов: $A = \Omega$.

Упражнение 5

Из колоды карт вытянули туз.

Из полной коробки шоколадных конфет вытянули конфету, и она оказалась шоколадной.

Из коробки с печеньем вытянули шоколадную конфету.

Подброшенная монетка упадёт одновременно и орлом, и решкой.

Выбранное наугад число от 1 до 10 — чётное.

Невозможное

Случайное

Достоверное

Определения

Относительная частота события A — это отношение числа случаев n, в которых событие появилось, к общему числу случаев m:

$$W(A) = \frac{n}{m}.$$

Упражнение 6

Согласно информации AGON на март 2020 года, $61\ 828\ 342$ жителей России регулярно играют в шахматы. При этом население страны на 2020 год составляло $143\ 786\ 842$ человека. Найдите относительную частоту события «житель России играет в шахматы».

Упражнение 6

Согласно информации AGON на март 2020 года, $61\ 828\ 342$ жителей России регулярно играют в шахматы. При этом население страны на 2020 год составляло $143\ 786\ 842$ человека. Найдите относительную частоту события «житель России играет в шахматы».

Событие «человек играет в шахматы» встречается $61\ 828\ 342$ раза. Всего людей $143\ 786\ 842$. По формуле относительной частоты события находим:

$$\frac{61\ 828\ 342}{143\ 786\ 842} \approx 0.43.$$

Ответ: 0.43

Упражнение 7

Что необходимо для классического определения вероятности? Отметьте все подходящие варианты.

- [ ] Равновозможность исходов.
- [ ] Конечность пространства исходов.
- [ ] Честный кубик.
- [ ] Достоверность событий.

Классическое определение вероятности

Вероятность события — это отношение количества благоприятных исходов к количеству всех исходов. При условии, что все исходы в эксперименте равновероятны.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Задачи

Задача 1

Каждое утро Олеся решает, идти в офис или поработать из дома. Она бывает в офисе только один раз в неделю, с четверга по воскресенье включительно она туда не ходит. По статистике посещения офиса известно, что Олеся приходила по понедельникам примерно в половине случаев, а по вторникам — в трети случаев.
Чему равна вероятность того, что на следующей неделе Олеся будет в офисе в среду?

Задача 2

Сегодня Олеся решила сходить в офис. Пора одеваться! Есть 10 футболок, на одной из них принт с Чубаккой. У всех футболок равные шансы быть выбранными. Олеся уже убрала в сторону 6 футболок из 10.

Какова вероятность, что она пойдёт в офис в футболке с Чубаккой?

Задача 3

Пятеро друзей рассаживаются за пятиместным круглым столом в произвольном порядке. Какова вероятность того, что два конкретных человека будут сидеть рядом?

Домашнее задание

Домашнее задание

1. Определите количество элементарных событий для экспериментов:

- производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10;
- три раза подбрасывается игральная кость;
- наудачу извлекается одна кость из полной игры домино.

2. Из какого количества элементарных событий состоит пространство элементарных событий для следующего испытания: производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10, а затем столько раз кидается игральная кость, сколько очков выбито на мишени.

3. Рассмотрим эксперимент: трижды подбрасывается монета. Сколько элементарных событий соответствует событию: выпало чётное количество орлов?

4. У нас есть пакет, в котором лежит 15 шариков, 9 из которых фиолетового цвета, а остальные белые. Какова вероятность вытащить из пакета один белый шарик?

5. В автомате, продающем, маленькие мячики есть мячи 5 цветов: 21 синих, 30 красных, 15 зеленых, 8 белых, а остальные желтые. Всего в автомате 90 мячиков. Какова вероятность, что Коле достанется мяч не синего цвета.

6. На конкурсе выступают 11 участников из Казани, 6 участников из Нижнего Новгорода, 3 участника из Москвы и 7 участников из Твери. Порядок выступления в конкурсе определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что последним будем выступать конкурсант из Нижнего Новгорода? Результат округлите до сотых.

7. В портфеле у Васи лежали учебники по алгебре, геометрии, химии, биологии и литературе. Вася не глядя вынимает один учебник, какова вероятность того, что он вытянул алгебру?

8. В соревнованиях по борьбе участвуют 73 участника. Из них 25 участников из Москвы, в том числе Б. Егоров. На пары участники разбиваются с помощью жеребьевки. Какова вероятность того, что противником Б. Егорова станет участник из Москвы? Результат округлите до сотых.

9. Петя подбросил два игральных кубика. Какова вероятность того, что в сумме выпадет не менее 9 очков.

10. Маша подбрасывает два игральных кубика. Какова вероятность того, что в сумме на кубиках выпадет 6 очков? Результат округлите до сотых.