СПИСОК ЗАДАЧ

16-24 марта 2024

АННОТАЦИЯ

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

Взлёт

Оглавление

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

16.03.2024. Оценки.

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (в частности, последняя цифра палиндрома совпадает с первой и потому не равна нулю). Квадраты двух различных натуральных чисел имеют по 1001 цифре. Докажите, что строго между этими квадратами на числовой прямой найдется палиндром.

2. Дано натуральное число N. На доске написаны числа от N^3 до $N^3 + N$. Среди них a чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b.

3. Натуральные числа d и $d > d$ — делители натурального числа n. Докажите, что $d > d + \frac{d^2}{n}$.

4. Решите уравнение в натуральных числах $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$

5. Найдите все пары натуральных чисел m, n такие, что $m^4 + m$ делится на $m^2 - n$ и $n^4 + n$ делится на $n^2 - m$.

6. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{x}$?

7. На доске написали строку из ста попарно различных натуральных чисел. Затем под каждым числом написали сумму этого числа и НОДа всех остальных. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может оказаться в нижней строке?

8. Для натурального числа n обозначим через $C(n)$ сумму его различных простых делителей. Например, $C(2) = 2, C(45) = 8$. Найдите все нечётные n такие, что $C(2n + 1) = C(n)$.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

16.03.2024. Геометрия на клетчатой бумаге. Терешин А.Д.

1. На клетчатой бумаге отметьте три узла так, чтобы в образованном ими треугольнике две медианы были перпендикулярны.

2. На клетчатой бумаге отметили точки A, B, C — вершины неравнобедренного треугольника ABC с периметром P. Докажите, что $|AB - AC| > 1/P$.

3. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

4. Существует ли треугольник с вершинами в узлах сетки, у которого центры вписанной и описанной окружностей, точки пересечения высот и медиан также лежат в узлах сетки?

5. На клетчатой бумаге отметьте три узла так, чтобы в образованном ими треугольнике сумма двух меньших медиан равнялась полупериметру.

6. Возможно ли нарисовать на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа?

7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

8. На доске была нарисована система координат и отмечены точки $A(1;2)$ и $B(3;1)$. Систему координат стёрли. Восстановите её по двум отмеченым точкам.

9. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник M, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

17.03.2024. Геометрические неравенства. Терёшин А.Д.

Разбираемся, кто где находится

1. Города A, B, C, D расположены так, что расстояние от C до A меньше расстояния от D до A, а расстояние от C до B меньше расстояния от D до B. Докажите, что расстояние от города C до любой точки прямолинейной дороги, соединяющей города A и B, меньше расстояния от города D до этой точки.

2. На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка E, для которой $AB < BE$. Кроме того, $AC > CD$. Докажите, что $ED < 2BC$.

3. В трапеции $ABCD$ точка F — середина боковой стороны BC, точка K на другой боковой стороне AD является основанием перпендикуляра, опущенного из точки F на AD. Оказалось, что $3AK \leqslant KD$. Докажите, что $AB + CD \geqslant 2AF$.

4. В треугольнике ABC с тупым углом C точка D на стороне BC такова, что $AC+AB = 2AD$. Медиана CM пересекает AD в точке N. Докажите, что $AN < 2ND$.

5. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, точка E — произвольная точка стороны AC. Известно, что $BE \geqslant 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

Ищем неравенство треугольника

6. Внутри угла ABC, равного 105°, отмечена точка X такая, что $\angle CBX = 70^\circ$ и $BX = BC$. На отрезке BX выбрана точка Y так, что $BY = BA$. Докажите, что $AX + AY \geqslant CY$.

7. Дан равнобедренный треугольник ABC. На продолжениях основания AC за точки A и C выбраны точки D и E соответственно. На продолжении CB за тчоку B выбрана точка F. Известно, что $AD = BF$ и $CE = CF$. Докажите, что $BD + CF > EF$.

8. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка E, а на отрезке CE выбрана точка F. Оказалось, что $AF = BE, CE = DE$ и $\angle ADE = \angle BEC = 2\angle CDF$. Докажите, что $AD + BC > AB$.

9. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle ACB = 2\angle CAB$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена точка E. Докажите, что $BC + BE > DE$.

10. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle ABC = \angle MON$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

17.03.2024. Разнокомби-1. Кожевников П.А.

1. Аня и Боря играют на доске 8×8. начинает Аня. За свой ход Аня вписывает в какую-то пустую клетку букву А, а Боря — в две пустые соседние по стороне клетки букву Б. Игра заканчивается, когда какой-то игрок не может сделать очередной ход. Какое наибольшее количество букв Б может обеспечить себе Боря?

2. В клетках доски $8 \times 20\,000$ (8 строчек, $20\,000$ столбцов) расставлены целые числа от 1 до $160\,000$, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания или убывания.

3. Картина на выставке современного искусства представляет собой 1000 точек, идущих по кругу, каждая точка — красная или синяя. Искусствовед считает недостатком пару соседних красных точек и пару синих точек, идущих через 1. Каково наименьшее возможное количество недостатков?

4. По кругу расставлены положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть A_i — среднее арифметическое числа a_i и нескольких (возможно, одного) следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{2024}$ не меньше среднего арифметического всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$.

5. Кимия взяла натуральные числа a и b, а затем выписала в строку в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 2024$ так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:

   (1) их сумма равна a;

   (2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна b.

   Найдите все возможные значения b.

6. Яша записывает в клетки таблицы $n \times n$ все натуральные числа от 1 до n^2 (каждое число по разу). Гриша смотрит на таблицу, выбирает несколько клеток, среди которых нет двух клеток, имеющих общую сторону, а затем считает сумму чисел во всех выбранных клетках. Какую наибольшую сумму гарантированно может обеспечить Гриша? Решите задачу для а) $n = 100$, б) $n = 99$.

7. Дано множество P из $n > 100$ точек на плоскости. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Между точками проведены $20n$ различных отрезков (концами отрезков являются данные n точек). Докажите, что существует прямая, не проходящая ни через одну из точек множества P, пересекающая хотя бы 200 проведённых отрезков.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

18.03.2024. Теория чисел. Кузьменко Ю.В.

1. 72 последовательных натуральных числа как-то разбили на 24 группы по три числа. Затем числа в группах перемножили и получили 24 произведения. Наконец после этого у каждого из произведений посчитали сумму цифр. Могло ли получиться 24 одинаковых суммы?

2. Кимия взяла натуральные числа a и b, а затем выписала в строку в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, 2024$ так, чтобы для любой пары соседних чисел оказалось выполнено хотя бы одно из двух условий:
(1) их сумма равна a;
(2) их разность (при вычитании из большего числа меньшего) равна b.
Найдите все возможные значения b.

3. Существует ли пять последовательных натуральных чисел, НОК которых является точным квадратом?

4. Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

5. Целые числа a, b, c таковы что $ab + bc + ac = 0$. Докажите, что число abc представляется в виде x^2y^3 для некоторых целых x, y.

6. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

7. Пусть есть 2013 подряд идущих чисел таких, что их произведение делится на некоторое число x, а ни одно из них не делится на x. Докажите, что можно выбрать 2012 подряд идущих чисел обладающих этим же свойством.

8. Существует ли такое натуральное $N > 10^{20}$, состоящее из нечетных цифр, причем цифр 1,3,5,7,9 в нем поровну, которое делится на любое 20-значное число получаемое из него вычеркиванием цифр.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

18.03.2024. Разнокомби-2. Кожевников П.А.

1. Петя вынимает из мешка черные и красные карточки и складывает их в две стопки. Класть карточку на другую карточку того же цвета запрещено. Десятая и одиннадцатая карточки, выложенные Петей, — красные, а двадцать пятая — черная. Какого цвета двадцать шестая выложенная карточка?

2. Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку некоторого столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку некоторой строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

3. В квадрат 1×1 бросили несколько иголок суммарной длины 2024. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 1000 иголок.

4. Вершины правильного 30-угольника покрашены в 15 цветов, в каждый цвет покрашено ровно две вершины. Одноцветные вершины соединили отрезком. Могло ли оказаться, что среди всех проведенных 15 отрезков нет двух равных?

5. На каждую клетку доски 8×8 Вася кладет камень одного из трех цветов: красный, синий, зеленый. Каких способов больше — тех, в которых всего на доске окажется нечетное число красных камней, или тех, в которых четное?

6. Сережа нарисовал на клетчатой бумаге прямоугольник, стороны которого образуют углы в $45°$ с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки?

7. Изначально в каждой клетке клетчатой плоскости лежит монета решкой вверх. Разрешается выбрать квадрат 2×2 и перевернуть все монеты в нем, кроме верхней правой. Можно ли добиться того, чтобы через конечное число ходов ровно две монеты лежали орлом вверх?

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

19.03.2024. Алгебра с комбисюжетами. Чулков Д.А.

1. Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от -12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?

2. Назовём последовательность из букв А и Б *антипалиндромом*, если при записи её в обратном порядке и замене букв А и Б друг на друга, получается исходная последовательность. Например, последовательность АББААБ — антипалиндром. Назовём *весом* антипалиндрома произведение позиций, на которых стоит буква А. Например, стоимость антипалиндрома АББААБ равна $1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$. Найдите сумму стоимостей всех антипалиндромов длины 2024.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, b_1, b_2, \ldots, b_{2024}$ — попарно различные натуральные числа. Рассмотрим графики функций вида

$$y = \frac{a_i}{x + b_i}$$

(всего 2024 функция). Может ли оказаться, что абсциссы всех точек пересечения этих графиков целые числа?

4. Даны числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов

$$x^2 - a_1x + a_2, \quad x^2 - a_2x + a_3, \quad \ldots, \quad x^2 - a_9x + a_{10}, \quad x^2 - a_{10}x + a_1$$

не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

5. Саша выбрал 4 натуральных числа x, y, z, t и выписал 12 дробей:

$$\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}.$$

Докажите, что какие-то две дроби отличаются не больше чем на $11/60$.

6. Среди натуральных чисел $a_1, \ldots, a_k$ нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения $a_ix^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0$, где $1 \leqslant i \leqslant k - 2$, не имеют корней?

7. Будем говорить, что набор чисел a_1, a_2, ..., a_m *сильнее* набора b_1, b_2, ..., b_n, если среди всех неравенств вида $a_i > b_j$ количество верных неравенств не менее чем в 2 раза превосходит количество неверных. Докажите, что не существует трех наборов A, B и C, таких что A сильнее B, B сильнее C, C сильнее A.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

19.03.2024. Интерпретация подсчётов. Бакаев Е.В.

1. (Турнир им. А.П.Савина) В клетчатом квадрате 6×6, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

2. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него стоит девочек, а каждую девочку — сколько слева от неё стоит мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

3. (М1001, Санкт-Петербургская олимпиада, 1986) В куче 1001 камень. Её произвольно делим на две кучи, подсчитываем количества камней в них и записываем произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделываем ту же операцию: делим на две и записываем произведение чисел камней в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяем с одной из трёх полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равна сумма 1000 записанных произведений?

4. (Турнир городов, 2006) На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \leqslant y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на петиной бумажке?

5. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого ребёнка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?
Решите а) с помощью интерпретации, б) индуктивно.

6. На доске написаны два натуральных числа x и y. Вася записывает на бумажку одно из этих чисел, а на доске уменьшает другое число на 1. С новой парой чисел на доске он снова проделывает ту же операцию, и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на васиной бумажке?
Решите а) с помощью интерпретации, б) индуктивно.

7. (М2366, Турнир городов, 2014) С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятёрка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок — по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

8. (Турнир городов, 2014) На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.
Решите а) с помощью интерпретации, б) индуктивно.

9. (Турнир им. А.П.Савина, 2015) На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Ваня выбирает какое-нибудь число и записывает на листок бумаги произведение всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Ваня сложит все числа на листке. Докажите, что сумма, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа.

10. (Турнир им. А.П.Савина, 2015) Сначала в каждой клетке таблицы 10×10 было записано число 10. Каждый раз выбирается какая-то клетка, на листок записывается количество соседних (по стороне) клеток, в которых стоит число не меньшее, чем в выбранной, после чего число в выбранной клетке уменьшается на 1. Какой может быть сумма всех чисел на листке, когда все числа в таблице станут нулями?

11. (Московская математическая олимпиада, 2018) Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

12. (Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 1995) Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

13. (Турнир городов, 2021) Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.

14. (Турнир им. А.П.Савина, 2015) Каждый раз одну из куч камней делят на две и записывают число $ab(a+b)$, где a и b — количества камней в двух новых кучках. Сначала была одна куча из N камней, а в конце остались только кучи из одного камня. Чему может быть равна сумма записанных выражений?

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

20.03.2024. Площади. Терёшин Д.А.

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

3. На диагоналях AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты такие точки M и K, что $BM \parallel CD$ и $CK \parallel AB$. Докажите, что отрезок MK параллелен AD.

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S взята точка O, причем $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Докажите, что тогда $ABCD$ — квадрат и O — его центр.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle B = 2\angle C$. На стороне BC отмечена точка D, такая что $AB = CD$. Прямые AD и BL пересекаются в точке T. Докажите, что площади треугольников ALD и CLT равны.

6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90°$. Площадь четырёхугольника $AMCD$ равна S. Докажите, что $AB \cdot CD \geqslant 2S$.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

20.03.2024. Теория чисел в комбинаторных задача. Молчанова В.Г.

1. На листе бумаги выписаны все натуральные делители некоторого натурального числа. Среди них имеется ровно 50 чисел, дающих остаток 2 при делении на 8, ровно 25 чисел, дающих остаток 3 при делении на 8, и ровно 100 чисел, дающих остаток 4 при делении на 8. Сколько на листе может быть чисел, которые при делении на 8 дают остаток 7?

2. В последовательности нескольких (больше одного) натуральных чисел каждое число, начиная со второго, получается либо умножением предыдущего числа на 2, либо делением его на 16. Возможно ли, чтобы сумма этих чисел была равна 2^{2023}?

3. В ряд записано 1000 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на 77 или 78 частей, образующих числа, среди которых не менее 76 делится на 13.

4. На доске написано несколько (больше одного) натуральных чисел. Алиса и Боб играют в следующую игру. На своем ходу Алиса должна прибавить 2024 к любому числу на доске, Боб на своем ходу должен заменить некоторое четное число n на доске на $\frac{n}{2}$. Ходы делаются по очереди, Алиса ходит первой. Если Боб не может сделать ход, игра заканчивается.
Посмотрев, какие числа записаны на доске, Боб понял, что, независимо от того, как будет ходить Алиса, он сможет заставить игру закончиться. Докажите, что тогда игра гарантированно закончится независимо от ходов Алисы и Боба.

5. Все четырехзначные числа без нулей в десятичной записи выписаны в ряд в некотором порядке. Докажите, что полученное в результате многозначное число имеет трехзначный простой делитель.

6. Клетки бесконечной полоски бумаги пронумерованы натуральными числами. В каждой клетке написано натуральное число, причем для любых двух клеток число в клетке с большим номером больше, чем число в клетке с меньшим номером. Известно, что для всех натуральных a и b (в том числе и равных) число в клетке с номером ab равно произведению чисел, записанных в клетке a и клетке b. Какое наименьшее значение может принимать число в клетке с номером 2, если известно, что оно больше двух.

7. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до n по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на n. Для каждого n определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

20.03.2024. Основная теорема Арифметики. Молчанова В.Г.

1. Сумма пяти делителей натурального числа a - простое число. Докажите, что произведение этих пяти делителей не превосходит a^4.

2. Найдите все натуральные числа меньшие 300, имеющие ровно 15 делителей.

3. Сколько натуральных решений имеет уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1980}$?

4. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

5. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

6. Для натуральных чисел a, b, c, d выполнено равенство $ab = cd$. Докажите, что $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} + d^{2024}$ – составное.

7. По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

8. В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер n он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и n. Докажите, что на каждом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

21.03.2024. Подобие. Терешин А.Д.

1. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, а затем через точки A и B проведены прямые l_A и l_B соответственно, параллельные прямой CD. Продолжения сторон BC и AC за точку C пересекают l_A и l_B в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\dfrac{1}{CD} = \dfrac{1}{AX} + \dfrac{1}{BY}$.

2. Диагонали трапеции $ABCD(AD \parallel BC)$ пересекаются в точке K. Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M, что $\angle MBC = \angle MAD, \angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняются равенства: $\angle CBD = \angle CAB$ и $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD и AC можно сложить прямоугольный треугольник.

4. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$. Докажите, что углы ABP и CBQ равны.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причём $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.

Бонус для разбора

1. На клетчатой бумаге дан многоугольник с вершинами узлах. Известно, что все его стороны являются целыми числами. Докажите, что его периметр является чётным числом.

2. Точка N — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а точка M на стороне AB такова, что $CM \perp BD$. Докажите, что если $BM > MA$, то $2BC + AD > 2CN$.

3. Докажите, что прямая делит периметр и площадь треугольника в равных отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности треугольника.

Сборы перед заключительным этапом олимпиады им. Л. Эйлера

22.03.2024. Повороты.

Ввод в движения на плоскости, базовые понятия и примеры задач на их использование.

1. Точка B лежит между A и C. В полуплоскости с границей AB построены правильные треугольники ABM и BCP. Точки K, E— середины AP, MC соответственно. Доказать, что BKE — правильный.

2. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC взяты такие точки M, L, N, что ML || AC, MN || BC. Докажите, что точка M и середины отрезков AL и BN являются вершинами равностороннего треугольника.

3. Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC, PA = 3, PB = 4, PC = 5. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Внутри квадрата ABCD взята такая точка P, что AP = 1, BP = 2, CP = 3. Найдите $\angle APB$.

5. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD взяты точки W, X, Y, Z соответственно так, что AW + AZ + CX + CY составляет половину периметра квадрата. Докажите, что WY и XZ перпендикулярны.

6. Внутри квадрата ABCD взята произвольная точка M. Из вершин A, B, C, D проведены прямые, перпендикулярные прямым BM, CM, DM, AM соответственно. Докажите, что все проведенные прямые пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABDE и ACFG. Докажите, что отрезки BG и EC равны и перпендикулярны друг другу. Докажите, что центры квадратов и середины отрезков BC и EG являются вершинами квадрата. Докажите, что середина BC лежит на высоте тр-ка AEG.

8. На бильярдном столе в форме равностороннего треугольника запускают бесконечно кататься точечный шар. Оказалось, что в некоторой точке стола шар побывал 7 раз. Докажите, что он побывает в этой точке и восьмой раз.