



АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ADYGHE STATE UNIVERSITY

Математика для всех

Семинар 2

От множеств к логике

Анжела Евгеньевна Артисевич

Институт точных наук и цифровых технологий
Кафедра алгебры и геометрии

Системы счисления

Упражнение 2

Ник решил подарить Тине именно монобукет, то есть один из элементов множества $A = \{\text{пионы, дельфиниумы, пионовидные розы, гвоздики, ромашки, астры, альстромерии}\}$.

Затем Ник вспомнил, что «п» — его несчастливая буква, и решительно выкинул из множества монобукетов все цветы, названия которых начинаются на «п».

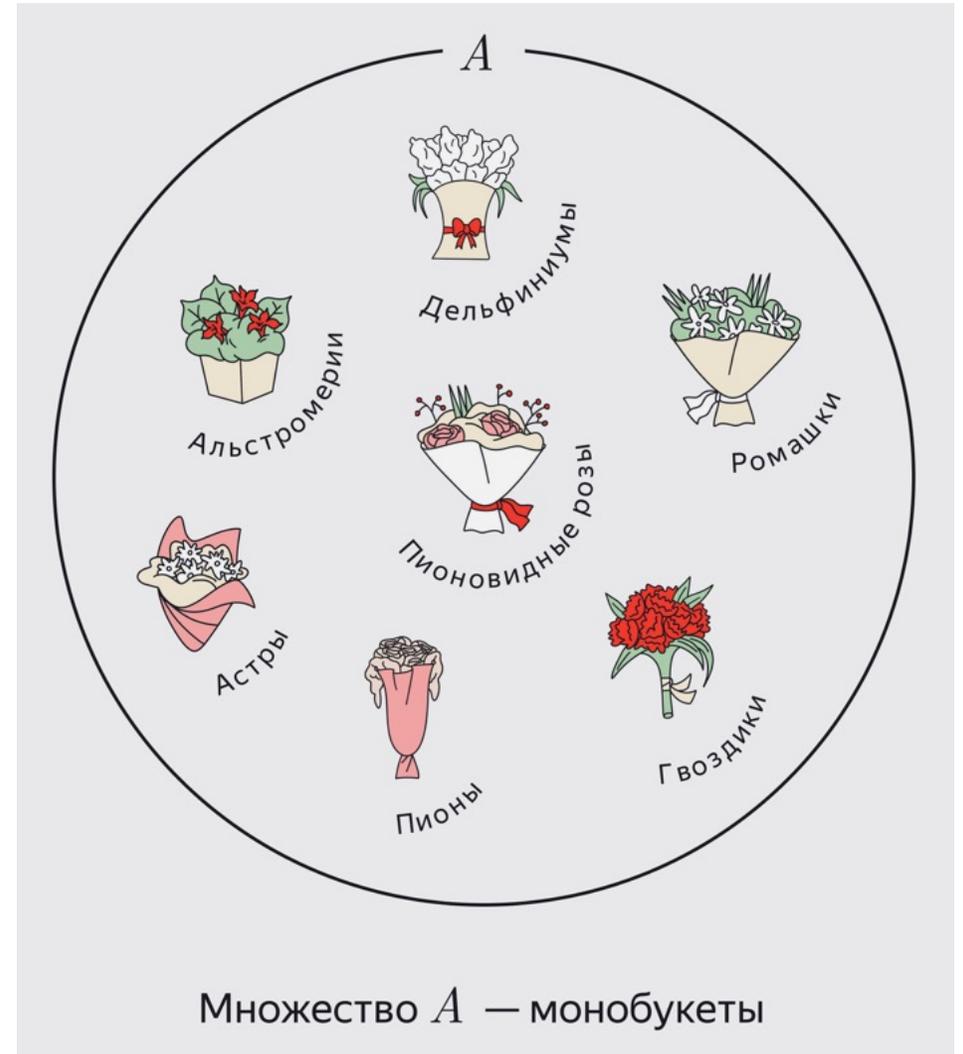
Рассмотрим подмножество множества монобукетов — монобукеты, начинающиеся с другой буквы. Сколько в нём элементов?

4

5

6

Пионы и пионовидные розы не прошли строгий отбор Ника!



Система счисления	Из каких знаков состоит	Запись числа 99
Двоичная	0, 1	1100011_2
Троичная	0, 1, 2	10200_3
Восьмеричная	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	143_8
Шестнадцатеричная	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	63_{16}

Упр 1

В левом столбце даны числа, они могут принадлежать нескольким системам счисления. В правом даны основания систем счисления. Ваша задача — соединить каждое число с **минимальным** подходящим основанием системы счисления.

- 1) В числе 362 содержится цифра 6, значит, в системе счисления как минимум есть цифры от 0 до 6 — следовательно, минимальное основание равно 7.
- 2) Число 9870 состоит из цифр от 0 до 9 — система как минимум десятичная.
- 3) 121 пришло из системы, где как минимум есть 0, 1 и 2 — она имеет основание 3.
- 4) 1001 состоит всего из двух цифр — может жить в любой системе с основанием от 2 и больше.
- 5) В числе AB13947 есть символы A (отвечает за десятку) и B (отвечает за одиннадцать). Значит, система должна иметь минимальное основание 12.
- 6) В числе 1370FE есть символ F (отвечает за пятнадцать) — поэтому система счисления должна быть с основанием хотя бы 16.

362

2

9870

7

121

16

1001

3

AB13947

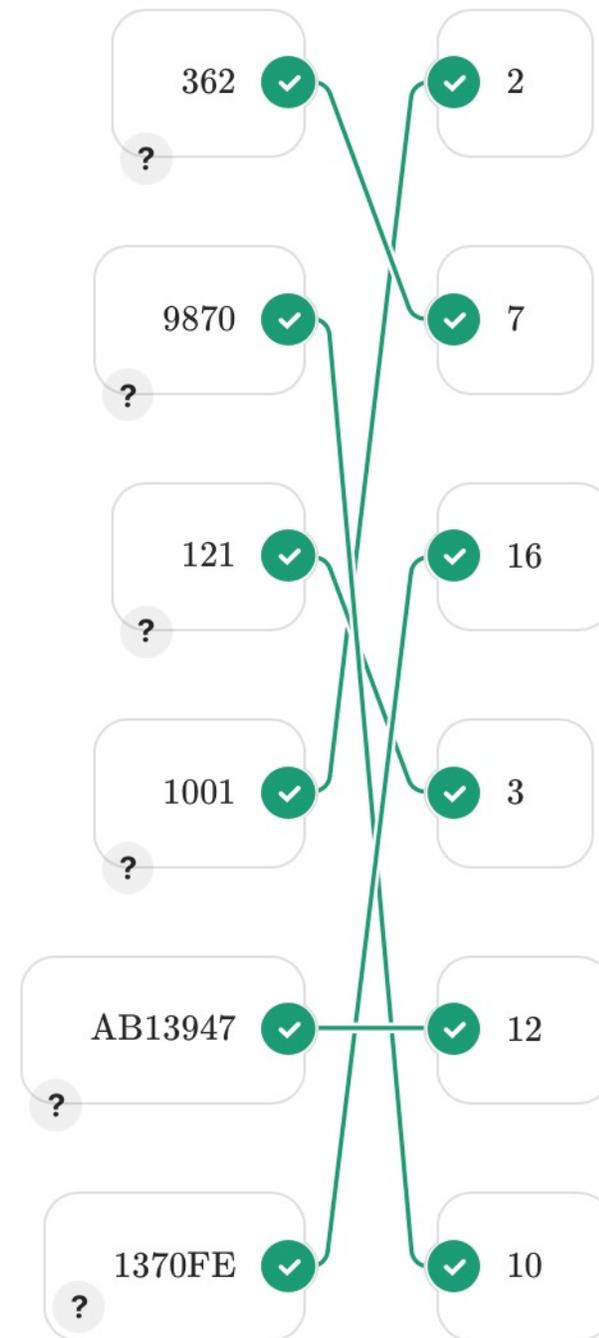
12

1370FE

10

Упр 1

В левом столбце даны числа, они могут принадлежать нескольким системам счисления. В правом даны основания систем счисления. Ваша задача — соединить каждое число с **минимальным** подходящим основанием системы счисления.



Сравнение

Сравнение чисел в двоичной системе работает так же, как и в десятичной. Чем больше у числа разрядов, тем оно больше.

$$101_2 > 11_2$$

$$10111000_2 > 111000_2$$

Если количество разрядов одинаковое, сравнивают значения в каждом из них слева направо — до первого несовпадающего.

$$101_2 < 111_2$$

$$100101_2 < 100110_2.$$

Впрочем, без индекса 2 результат сравнения оказался бы тем же!

Какой знак обратит неравенство в верное?

$1000_2 \vee 10000_2$

$1010_2 \vee 111_2$

$1100101_2 \vee 1011110_2$

$111101_2 \vee 1000000_2$

$1101 \vee 10001$

Упр 2

Какой знак обратит неравенство в верное?

>

$$1100101_2 \vee 1011110_2$$

?

$$1010_2 \vee 111_2$$

?

<

$$1101 \vee 10001$$

?

$$111101_2 \vee 1000000_2$$

?

$$1000_2 \vee 10000_2$$

?

Сложение

Начнём со сложения! Когда в системе счисления всего две цифры, вариантов суммы не так много. Перечислим их все.

$$\begin{aligned}0_2 + 0_2 &= 0_2 \\0_2 + 1_2 &= 1_2 \\1_2 + 0_2 &= 1_2 \\1_2 + 1_2 &= 10_2\end{aligned}$$

Первые три строчки были верны и для десятичной системы, а вот последняя — новшество двоичной. Именно так в двоичной системе будет выглядеть привычное нам равенство $1 + 1 = 2$.

Зная эти несложные правила, попробуем посчитать $111001_2 + 10011_2$ в столбик.

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1001100_2 \end{array}$$

1) Вычислите $10000110_2 + 1110101_2$ в столбик.

2) Вычислите $111110_2 + 110110_2$ в столбик.

1) Вычислите $10000110_2 + 1110101_2$ в столбик.

$$\begin{array}{r} + 10000110_2 \\ 1110101_2 \\ \hline 11111011_2 \end{array}$$

Проверим через десятичную систему:

$$10000110_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 128 + 4 + 2 = 134;$$

$$1110101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 117.$$

Сумма должна получиться 251, сверяем:

$$\begin{aligned} 11111011_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 251. \text{ Бинго!} \end{aligned}$$

Ответ: 11111011

Упр 3

1) Вычислите $10000110_2 + 1110101_2$ в столбик.

Ответ: 11111011

2) Вычислите $111110_2 + 110110_2$ в столбик.

Ответ: 1110100

Вычислите $100011_2 - 1001_2$ в столбик.

Упр 4

Вычислите $100011_2 - 1001_2$ в столбик.

Ответ: 11010

$$\begin{array}{r} \dot{1}00011_2 \\ - 1001_2 \\ \hline 11010_2 \end{array}$$

Можно проверить через десятичную систему: $100011_2 = 35$, $1001_2 = 9$, а $11010_2 = 26$, всё в порядке!

Ответ: 11010

Высказывания

Высказывание — это повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. Но оно не может быть и тем, и другим одновременно.

Высказывания обозначают строчными или заглавными латинскими буквами и записывают через знак равно или двоеточие. Мы будем писать через знак равно и обозначать заглавными буквами.

Даже если на момент чтения мы не можем определить, является ли утверждение истинным или ложным, но при этом **существует гипотетическая возможность** определения его истинности или ложности — оно всё равно является высказыванием.

Например: «Во Вселенной существуют разумные формы жизни, отличные от человека». Сейчас мы не можем ответить, является ли это высказывание истинным или ложным, но при этом теоретически есть алгоритм для проверки такого высказывания: либо ждать контакта с ними, либо проверить все планеты во Вселенной.

Например: «Во Вселенной существуют разумные формы жизни, отличные от человека». Сейчас мы не можем ответить, является ли это высказывание истинным или ложным, но при этом теоретически есть алгоритм для проверки такого высказывания: либо ждать контакта с ними, либо проверить все планеты во Вселенной.

A = «Число 3 является целым». Это высказывание, и оно истинно.

B = «Солнце — это планета». Это высказывание, и оно ложно.

C = «Сегодня шёл дождь». Это высказывание, хоть здесь и нельзя определить, истинно оно или ложно без дополнительных данных (например, о месте действия).

D = «Красный мяч». Это не высказывание, здесь просто назван предмет. А вот «Этот мяч — красный» уже высказывание.

E = «Вы уже пообедали?». Это вопрос, а не высказывание.

F = «Поехали кататься!». Это призыв к действию, но не высказывание.

G = « $2 > 7$ ». Высказывание, и оно ложно.

Упр 5

Отметьте все высказывания.

- $H =$ «Деревья выделяют кислород»
- $K =$ « $6 = 7$ »
- $J =$ «Длинная песня»
- $Q =$ «Тварь я дрожащая или право имею?»
- $S =$ «Моё мороженое очень холодное»
- $C =$ «Скорость света равна 3 км/с»
- $U =$ «Храните деньги в сберегательных кассах»
- $E =$ « $8 > 100_2$ »

Упр 5

Отметьте все высказывания.

- $H =$ «Деревья выделяют кислород»
- $K =$ « $6 = 7$ »
- $J =$ «Длинная песня»
- $Q =$ «Тварь я дрожащая или право имею?»
- $S =$ «Моё мороженое очень холодное»
- $C =$ «Скорость света равна 3 км/с»
- $U =$ «Храните деньги в сберегательных кассах»
- $E =$ « $8 > 100_2$ »

$H =$ «Деревья выделяют кислород»

Это высказывание, и оно истинно — ведь деревья и правда выделяют кислород!

$K =$ « $6 = 7$ »

Это высказывание. Оно ложное, ведь равенство неверное, но тем не менее.

$J =$ «Длинная песня»

$Q =$ «Тварь я дрожащая или право имею?»

Эта цитата не является высказыванием, так как это вопрос.

$S =$ «Моё мороженое очень холодное»

Это высказывание, ведь здесь что-то утверждается. Действительно ли мороженое очень холодное — надо смотреть в каждом конкретном случае, но явно либо да, либо нет.

$C =$ «Скорость света равна 3 км/с»

Скорость света гораздо выше — почти $300\,000$ км/с. Но это всё равно высказывание, просто ложное.

$U =$ «Храните деньги в сберегательных кассах»

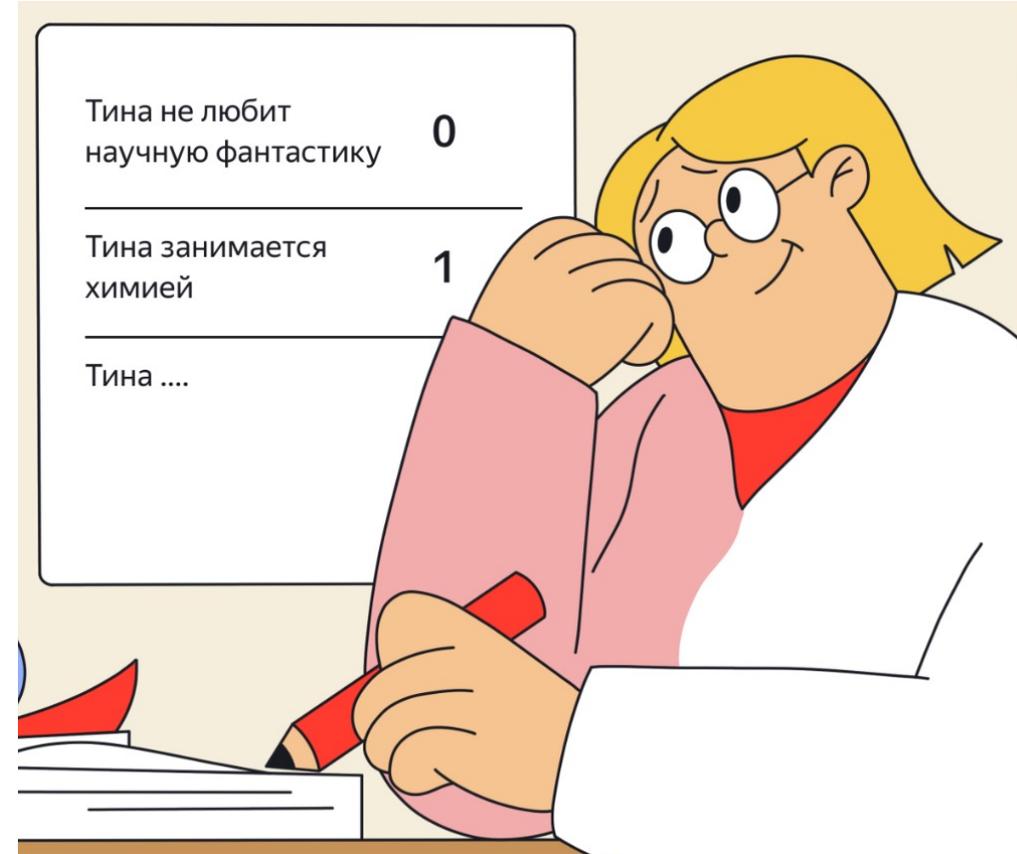
$E =$ « $8 > 100_2$ »

Это высказывание, и оно истинно, ведь $8 = 1000_2$. Но знать это необязательно — это в любом случае высказывание, раз оно что-то утверждает.

Логика и двоичная система счисления

Ник до сих пор не пригласил Тину на свидание. Он по-прежнему об этом мечтает, но не может решиться. Соня посоветовала Нику разобраться с тревогами: отделить надуманные страхи от объективных фактов. «В этом мне поможет математика, — подумал Ник. — Математика меня ещё никогда не подводила».

Итак, Ник начал выписывать свои мысли в виде высказываний, а рядом с ними ставить 0 или 1.



Логика и двоичная система счисления

Ник до сих пор не пригласил Тину на свидание. Он по-прежнему об этом мечтает, но не может решиться. Соня посоветовала Нику разобраться с тревогами: отделить надуманные страхи от объективных фактов. «В этом мне поможет математика, — подумал Ник. — Математика меня ещё никогда не подводила».

Итак, Ник начал выписывать свои мысли в виде высказываний, а рядом с ними ставить 0 или 1.

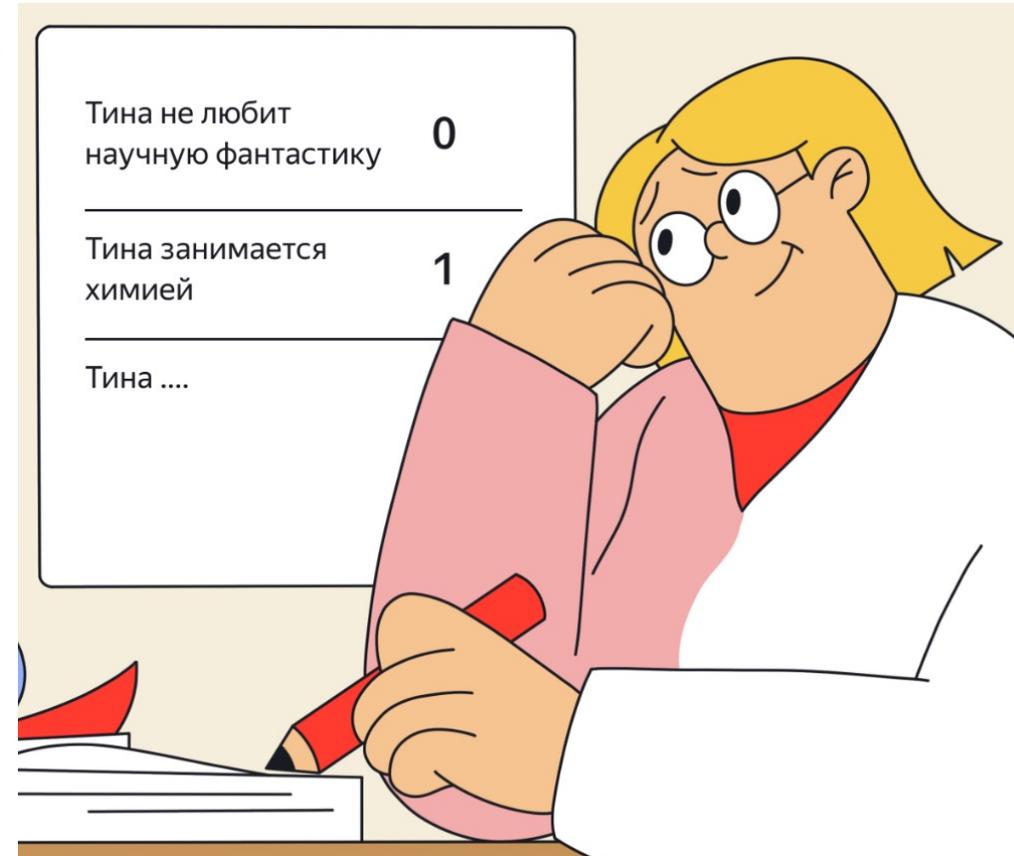
С точки зрения математической логики высказывание — это величина, которая принимает одно из двух значений: истина или ложь. Если высказывание истинно его значение приравнивают к единице, если ложно — к нулю.

Высказывание H = «Деревья выделяют кислород» истинно, значит, $H = 1$.

Высказывание K = « $6 = 7$ » ложно, значит, $K = 0$.

Немного напоминает двоичную систему счисления, раз значений всего два... и поверьте, это не последнее сходство на сегодня!

Иногда вместо 1 и 0 используют буквы T (от слова true — истина) и F (от слова false — ложь), иногда И и Л. Мы ограничимся единицей и нулём.



Высказывания, о которых шла речь выше, содержат только одно утверждение, поэтому их называют **элементарными**. Из них можно собирать более сложные, **составные высказывания**. Для этого используют грамматические связки «не», «и», «или», «если..., то...», «тогда и только тогда, когда» и другие.

Например, с высказыванием «Солнце светит» можно составить сколько угодно новых высказываний:

- «Солнце **не** светит»,
- «Солнце светит **и** растёт трава»,
- «Светит солнце **или** наступила ночь» и так далее.

У составного высказывания тоже есть значение 0 или 1, эдакое итоговое. Это значение зависит от значений исходных высказываний и от того, какая логическая связка или операция использовалась.

А теперь посмотрим, в результате каких логических операций составные высказывания получаются!

Начнём с простого.

Возьмём высказывание «Ник равнодушен к Тине» и подставим перед ним слова «неверно, что»: «Неверно, что Ник равнодушен к Тине».

Если исходное высказывание было истинным, то новое будет ложным. Если исходное было ложным, то новое будет истинным. Это отрицание!

Отрицание высказывания A — составное высказывание, которое является истинным, если высказывание A ложно, и ложным, если A истинно.

Отрицание обозначается как $\neg A$ или \bar{A} и читается «неверно, что A ».

Если $V =$ «Число 17 — простое», то $\neg V =$ «Неверно, что число 17 — простое» или «Число 17 — не простое». Это число действительно относится к простым, поэтому $V = 1$, а $\neg V = 0$.

Постройте отрицания высказываниям

Луна — спутник Земли.

... ▾

Число 5 является положительным.

... ▾

В радуге 8 цветов.

... ▾

$9 < 4$

... ▾

Постройте отрицания высказываниям

Луна — спутник Земли.

... ▾

Число 5 является положительным.

... ▾

В радуге 8 цветов.

... ▾

$9 < 4$

... ▾

Число 5 является отрицательным

Число 5 не является положительным

Земля — спутник Луны

Луна — не спутник Земли

Неверно, что в радуге 8 цветов

В радуге 7 цветов

$9 > 4$

$9 \geq 4$

Постройте отрицания высказываниям

Луна — спутник Земли.

... ▾

Число 5 является положительным.

... ▾

В радуге 8 цветов.

... ▾

$9 < 4$

... ▾

Число 5 является отрицательным

Число 5 не является положительным

Земля — спутник Луны

Луна — не спутник Земли

Неверно, что в радуге 8 цветов

В радуге 7 цветов

$9 > 4$

$9 \geq 4$

Таблица истинности

Логические значения высказывания $\neg A$ также можно описать с помощью **таблицы истинности**: в ней перечислены все возможные значения исходного высказывания A (то есть 0 и 1) и соответствующие им значения составного высказывания $\neg A$.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Читать таблицу нужно построчно: при $A = 0$ значение $\neg A = 1$, при $A = 1$ значение $\neg A = 0$.

Отрицание — это **унарная** операция, так как работает с одним высказыванием. Большинство же операций являются **бинарными**, то есть работают с двумя высказываниями.

Возьмём высказывания «Яблоко сладкое», «Груша сладкая» и соединим союзом «и»: «Яблоко и груша — сладкие».

Новое высказывание будет истинным, только если и яблоко сладкое, и груша. В любом другом случае оно будет ложным. Это конъюнкция!

Конъюнкция (логическое умножение) двух высказываний A, B — новое высказывание, которое считается истинным, если оба исходных высказывания истинны, и ложным во всех остальных случаях.

Конъюнкция высказываний A, B обозначается $A \wedge B$. Также можно встретить обозначение $A \& B$ или даже просто AB без дополнительного знака, как при умножении (обычно при работе со строчными буквами). Мы будем использовать обозначение \wedge .

Читается $A \wedge B$ как « A и B ». Часто используются союзы «а», «но», либо фраза строится вообще без союза. Главное — чтобы сохранялся смысл: конъюнкция высказываний A и B имеет значение 1, если оба высказывания равны единице.

Упр 7

$A =$ «Снег обычно белый»

$B =$ «Вода — это жидкость»

$A =$ «Солнце встаёт на западе»

$B =$ «Сегодня дует ветер»

$A =$ «23 — это простое число»

$B =$ «У числа 8 всего 2 делителя»

$A =$ «57 — это простое число»

$B =$ « $8 < 0$ »

$A =$ «42 делится как минимум на три чётных числа»

$B =$ «У уравнения $x^2 + 49 = 0$ нет действительных корней»

$$A \wedge B = 1$$

$$A \wedge B = 0$$

Упр 7

$A =$ «Снег обычно белый»

$B =$ «Вода — это жидкость»

$A =$ «Солнце встаёт на западе»

$B =$ «Сегодня дует ветер»

$A =$ «23 — это простое число»

$B =$ «У числа 8 всего 2 делителя»

$A =$ «57 — это простое число»

$B =$ « $8 < 0$ »

$A =$ «42 делится как минимум на три чётных числа»

$B =$ «У уравнения $x^2 + 49 = 0$ нет действительных корней»

$A \wedge B = 1$

$A \wedge B = 0$

Таблица истинности конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция — очень требовательный оператор: единица получается только в одном случае!

По таблице хорошо видно, почему конъюнкцию называют логическим умножением — её значение по сути равно произведению значений исходных высказываний.

Также можно сказать, что значение конъюнкции равно *минимальному* из значений исходных высказываний.

Важно! В узком смысле под конъюнкцией подразумевают сам символ \wedge , но в широком смысле — это высказывание, которое получается при помощи этого символа и двух элементарных высказываний.

Возьмём высказывания «Эта корзина подходит для овощей», «Эта корзина подходит для фруктов» и соединим связкой «или». Получится «Эта корзина подходит для овощей или фруктов».

Новое высказывание будет ложным только в том случае, если корзина не подходит ни для овощей, ни для фруктов. В остальных случаях оно будет истинным. Это дизъюнкция!

Дизъюнкция (логическое сложение) двух высказываний A, B — составное высказывание, которое считается ложным, если оба исходных высказывания ложны, и истинным во всех остальных случаях.

Дизъюнкция высказываний A, B обозначается $A \vee B$ и читается как « A или B ». Смысл «или» здесь следующий: если уже хотя бы одно из высказываний имеет значение 1, то и вся дизъюнкция будет иметь значение 1.

Упр 8

Восстановите последний столбец таблицы истинности для дизъюнкции.

A	B	$A \vee B$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Упр 8

Согласно определению, дизъюнкция имеет значение 0 только если оба исходных высказывания имеют значение 0. Во всех остальных случаях итоговое значение будет равно 1.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Ответ: 0 1 1 1

Эквиваленция (эквивалентность) двух высказываний A, B — новое высказывание, которое считается истинным, когда оба исходных высказывания имеют одинаковое значение.

Эквиваленция истинна при $A = B = 0$ и при $A = B = 1$, и ложна в остальных случаях.

Эквивалентность высказываний A, B обозначается $A \leftrightarrow B$ и читается «для того, чтобы A , необходимо и достаточно B » или « A тогда и только тогда, когда B ».

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция (эквивалентность) двух высказываний A, B — новое высказывание, которое считается истинным, когда оба исходных высказывания имеют одинаковое значение.

Примеры:

- 1) Число чётно тогда и только тогда, когда оно делится на 2.
- 2) Для того чтобы треугольник был равносторонним, необходимо и достаточно, чтобы все его углы были по 60 градусов.

Иногда эквиваленцию обозначают символом \Leftrightarrow . Такой же символ используют при эквивалентных преобразованиях уравнений и систем, и это не случайно!

В алгебре такая стрелка означает, что до и после неё стоят одинаковые выражения, уравнения или системы. А в логике она сообщает, что составное высказывание истинно, когда до и после неё стоят высказывания с одинаковыми значениями — или оба нули, или оба единицы.

Отметьте все верные пункты.

- Эквиваленция всегда истинна.
- Если $x = 0, y = 1$, то $x \leftrightarrow y = 0$.
- « $7 > 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $4x = 9$ имеет один корень». Это высказывание является эквиваленцией с истинным значением.
- В эквиваленции можно поменять высказывания местами и значение от этого не изменится.
- В таблице истинности эквиваленции больше единиц, чем у конъюнкции, но меньше, чем у дизъюнкции.

Эквиваленция всегда истинна.

Если $x = 0, y = 1$, то $x \leftrightarrow y = 0$.

Значение эквиваленции истинно, если x и y имеют одинаковые значения. А тут как раз не так, поэтому она ложна.

« $7 > 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $4x = 9$ имеет один корень».
Это высказывание является эквиваленцией с истинным значением.

Здесь обе части истинны, значит, и сама эквиваленция — истина!

В эквиваленции можно поменять высказывания местами и значение от этого не изменится.

Это правда! Из всех операций, что мы прошли, только импликация была чувствительна к порядку высказываний.

В таблице истинности эквиваленции больше единиц, чем у конъюнкции, но меньше, чем у дизъюнкции.

Всё так! Только два набора дадут значение 1, у конъюнкции такой набор был всего один, а у дизъюнкции — целых три.

Вы знаете уже пять логических операций и умеете работать с каждой в отдельности. Но операции редко ходят поодиночке. Гораздо чаще они собираются в группы вроде такой: $\neg(A \rightarrow B \vee A) \wedge A$.

Формула — элементарное или составное высказывание. В составном высказывании используются элементарные, а также логические операции и скобки.

Примеры формул: A , $\neg A$, $A \wedge B$, $B \leftrightarrow (A \rightarrow \neg C)$.

А вот $A \wedge$ или $\neg B \leftrightarrow$ формулами не являются, ведь все операции, кроме отрицания, — бинарные, им нужны два высказывания. Тут как раз не хватает второго.

В «обычной» математике формулами называют записи со знаком равно, здесь же знака равно нет, а формулы больше похожи на многочлены — есть свои аналоги переменных и знаков действия. Ну и скобки.

Операции внутри формул выполняют по порядку.

1. Отрицание \neg .
2. Конъюнкция \wedge .
3. Дизъюнкция \vee .
4. Импликация \rightarrow .
5. Эквиваленция \leftrightarrow .

Формулы и подформулы

Если в формуле есть скобки, сначала выполняют операции в них. Если в формуле несколько одинаковых операций — двигаются слева направо (если только кто-то из них не находится в скобках, внутри приоритет всегда выше).

$$1) \quad \overset{3}{B} \leftrightarrow (\overset{2}{A} \rightarrow \overset{1}{\neg C})$$

Кстати, скобки в этой формуле необязательны — без них порядок действий такой же.

А что с формулой, с которой мы начали?

$$2) \quad \overset{3}{\neg}(\overset{2}{A} \rightarrow \overset{1}{B} \vee \overset{4}{C}) \wedge A$$

Здесь скобки уже имеют значение: без них первым действием было бы отрицание.

Когда отрицание обозначено чертой над высказываниями, скобки опускают:

$$A \wedge (\overline{B \rightarrow A}) = A \wedge \overline{B \rightarrow A}.$$

Операции внутри формул выполняют по порядку.

1. Отрицание \neg .
2. Конъюнкция \wedge .
3. Дизъюнкция \vee .
4. Импликация \rightarrow .
5. Эквиваленция \leftrightarrow .

Упр 10

1) Расположите действия в порядке их выполнения внутри формулы

$$Y \vee X \rightarrow Z \wedge Y.$$

Упр 10

1) Расположите действия в порядке их выполнения внутри формулы

$$Y \vee X \rightarrow Z \wedge Y.$$



Сначала выполняется конъюнкция, затем дизъюнкция и в конце — импликация.

2) Расположите действия в порядке их выполнения внутри формулы

$$X \wedge \neg(X \leftrightarrow Y \rightarrow Z).$$



Внутри скобок первой будет импликация, затем эквиваленция. Потом применяется отрицание и напоследок — конъюнкция.

Упр 10

3) Расположите действия в порядке их выполнения внутри формулы

$$(\neg Z \wedge (Z \leftrightarrow Y)) \rightarrow X \vee Y.$$

Упр 10

3) Расположите действия в порядке их выполнения внутри формулы

$$(\neg Z \wedge (Z \leftrightarrow Y)) \rightarrow X \vee Y.$$



Когда скобок несколько, начинают с внутренних. Поэтому первой будет эквиваленция, затем отрицание и конъюнкция, а потом действия за скобками — дизъюнкция и импликация.

Домашнее задание

Домашнее задание 1

1. Записаться на курс «Математика.Ядро»
2. Прочитать «конспект 1»
3. Записать «конспект 1»
4. Выполнить задание «Семинар 1»
5. Просмотреть лекцию
6. Пройти «Тест 1»
7. Пройти опрос «Как мы воспринимаем математику»
8. Следить за новостями в курсе

1. Введение

 Лекция 1

ОТМЕТИТЬ КАК ВЫПОЛНЕННЫЙ

 Конспект

ОТМЕТИТЬ КАК ВЫПОЛНЕННЫЙ

 Тест 1

Открыто с: Воскресенье, 11 февраля 2024, 07:26

Закрывается: Воскресенье, 18 февраля 2024, 21:00

Сделать попытки: 1

Получить оценку

Получить проходную оценку

 Семинар 1. Основные понятия

Дать ответ на задание

 Как мы воспринимаем математики

Завершить задание