Основы теории множеств

В последующих частях этого курса предполагается, что Вы знакомы с базовой теорией множеств. В этом кратком документе кратко изложено, что требуется.

Понятие множества чрезвычайно фундаментально и пронизывает всю современную математическую мысль. Любая четко определенная совокупность объектов представляет собой множество. Например, у нас есть:

- множество всех студентов вашей группы;
- множество всех простых чисел;
- множество, единственным элементом которого являетесь вы.

Все, что нужно для **определения множества**, — это какой-то способ указать коллекцию.

На самом деле это неверно. В математической дисциплине, называемой абстрактной теорией множеств, допускаются произвольные коллекции, не имеющие определяющего свойства.

Если A — множество, то объекты в коллекции A называются элементами A. Мы пишем $x \in A$. Некоторые множества часто встречаются в математике, и для них удобно принять стандартное обозначение их:

$\mathbb{N}$: множество всех **натуральных** чисел (т. е. чисел 1, 2, 3 и т. д.)1
$\mathbb{Z}$: множество всех **целых** чисел (0, все положительные, все отрицательные целые числа)
$\mathbb{Q}$: множество всех **рациональных** чисел (дробей)
$\mathbb{R}$: набор всех **действительных** чисел

Так, например, $x \in \mathbb{R}$ означает, что x — действительное число. А запись $(x \in \mathbb{Q}) \wedge (x > 0)$ означает, что x — положительное рациональное число.

Существует несколько способов задания множества. Если у него небольшое количество элементов, мы можем перечислить их. В этом случае мы обозначаем множество, заключая список элементов в фигурные скобки; так, например,

$$\{1,2,3,4,5\}$$

обозначает набор, состоящий из натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и 5.

С помощью «многоточия» мы можем распространить это обозначение на любое конечное множество; например, запись $\{1,2,3,\ldots,n\}$ обозначает набор первых n натуральных чисел.

Снова $\{2,3,5,7,11,13,17,\ldots,53\}$ может (при правильном контексте) использоваться для обозначения множества всех простых чисел до 53.

Некоторые **бесконечные** множества также можно описать с помощью многоточия (только теперь точки не имеют конца), например, запись $\{2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots\}$ обозначает множество всех четных натуральных чисел. Опять же, $\{\ldots,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,\ldots\}$ обозначает набор всех четных целых чисел.

Однако в целом, за исключением **конечных** множеств с небольшим числом элементов, лучше всего описываются множества, задавая свойство, которое определяет набор. Если $A(x)$ является некоторым свойством, набор всех тех x, которые удовлетворяют $A(x)$, обозначается через

$$\{x \mid A(x)\}$$

Или, если мы хотим ограничить x теми, которые являются членами определенного множества X, мы должны написать

$$\{x \in X \mid A(x)\}$$

Это читается как «множество всех x из X таких, что $A(x)$». Например:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} \\
\mathbb{Q} &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m,n \in \mathbb{Z} \quad m > 0 \wedge mx = n\} \\
\{2;-2\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} \\
\{1;\ 2;\ 3\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}
\end{aligned}$$

Два **множества** A, B **равны** и пишутся $A = B$, если они состоят из одинаковых элементов. Как показывает приведенный выше пример, равенство множеств не означает, что они имеют идентичные определения; часто существует множество разных способов описания одного и того же множества. Определение равенства скорее отражает тот факт, что множество — это просто совокупность объектов.

Если нам нужно доказать, что множества A и B равны, мы обычно разбиваем доказательство на две части:

(a) Показать, что каждый член A является членом B.

(b) Докажите, что каждый член B является членом A.

Взятые вместе, (a) и (b) явно подразумевают $A = B$. (Доказательство как (a), так и (b) обычно относится к разновидности «возьмем произвольный элемент». Чтобы доказать (a), например, мы необходимо доказать $(\forall x \in A)\ (x \in B)$; поэтому мы берем произвольный элемент x из A и показываем, что x должен быть элементом B.)

Введенные обозначения множеств имеют очевидные расширения. Например, мы можем написать

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

и так далее.

В математике удобно ввести множество, не имеющее элементов: **пустое множество** (или нулевое множество).

Конечно, такой набор будет только один, поскольку любые два таких набора будут иметь одинаковые элементы и, следовательно, будут (по определению) равными. Пустое множество обозначается скандинавской буквой $\emptyset$.

Пустое множество можно указать разными способами; например

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$$
$$\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$$
$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

Обратите внимание, что $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$ — совершенно разные множества.

$\emptyset$ — пустое множество: в нем нет членов.

$\{\emptyset\}$ — множество, состоящее из одного элемента.

Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент A является членом B. Например, {1,2} — это подмножество {1, 2, 3}. Мы пишем $\mathrm{A} \subseteq B$ чтобы указать, что A является подмножеством B.

Если мы хотим подчеркнуть, что A и B здесь неравны, мы пишем $A \subset B$. При этом говорят, что A является собственным подмножеством B (это использование сравнивается с отношениями порядка $\leq$ и $<$ на $\mathbb{R}$.)

Очевидно, что для любых множеств A, B имеем

$A = B$ тогда и только тогда, когда $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Упражнение 1

1. Назовите общеизвестно множество, которое можно описать так:
   $$\{n \in \mathbb{N} \mid (n > 1) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{N})[(xy = n) \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1)]\}$$
2. Пусть $P = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$, $Q = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Как связаны множества P и Q?
3. Дайте упрощённое определение множества $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 0) \wedge (x^2 = 3)\}$.
4. Докажите, что для любого множества A:
   $$\emptyset \subseteq A \ \wedge \ A \subseteq A$$
5. Докажите, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A \subseteq C$:
6. Перечислите все подмножества множества $\{1, 2, 3, 4\}$.
7. Перечислите все подмножества множества $\{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$.
8. Пусть $A = \{x \mid P(x)\}$, $B = \{x \mid Q(x)\}$, где $P,\ Q$ – такие формулы, для которых
   $$\forall x\ [P(x) \Rightarrow Q(x)].$$
   Докажите, что $A \subseteq B$.
9. Докажите по индукции, что у n-элементного множества 2^n подмножеств.
10. Пусть $A = \{o, t, f, s, e, n\}$. Дайте альтернативное описание множества A.

Операции над множествами

Над множествами можно выполнять различные естественные операции. (Они примерно соответствуют сложению, умножению и отрицанию целых чисел.)

Рассматривая два множества A, B, мы можем получить множество всех элементов, которые являются элементов хотя бы одного из множеств A или B. Этот набор называется **объединением** A и B и обозначается $A \cup B$.

Формально это множество имеет определение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Пересечение множеств A, B — это множество всех элементов, которые являются элементами и множества A и множества B. Пересечение обозначается так: $A \cap B$
и имеет формальное определение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Два множества A, B называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов, то есть если $A \cap B = \emptyset$.

Теоретико-множественный аналог отрицания требует концепции универсального множества. Часто, когда мы имеем дело с множествами, все они состоят из однотипных объектов. Например, в теории чисел мы можем сосредоточиться на множестве натуральных чисел или множестве рациональных чисел; в математическом анализе мы обычно сосредотачиваемся на наборах действительных чисел. Универсальное множество для конкретного обсуждения — это просто множество всех объектов рассматриваемого типа. Часто это область, в которой варьируются квантификаторы.

После того, как мы зафиксировали универсальный набор, мы можем ввести понятие дополнения к множеству A. По отношению к универсальному множеству U дополнением к множеству A является множество всех элементов U, которые не входят в A. Этот набор обозначается A' и имеет формальное определение

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Например, если универсальное множество — это множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, а E — множество четных (натуральных) чисел, то E' — множество нечетных (натуральных) чисел.

Следующая теорема суммирует основные факты о трех только что рассмотренных операциях над множествами.

Теорема. Пусть A, B, C – три подмножества универсального множества U. Тогда верны тождества:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $A \cup A' = U$
10. $A \cap A' = \emptyset$
11. $(A')' = A$

Упражнение 2

1. Докажите теорему, указанную выше с помощью определения равенства множеств.
2. Докажите теорему, указанную выше с помощью кругов Эйлера.