Лабораторная работа №1. Элементы теории чисел

Цель работы: Ознакомить студентов с канонической формой представления чисел, нахождением количества делителей произвольного числа, нахождением наименьшего общего кратного (НОК) и наибольшего общего делителя (НОД) нескольких чисел, нахождением евклидовых чисел.

Теоретические пояснения

1.Представление чисел в канонической форме

Любое целое положительное число N может быть представлено в так называемой канонической форме, т.е. в виде произведения некоторых простых чисел в соответствующих степенях, а именно:

$$N = p_1^{n1} p_2^{n2} \dots p_k^{nk}, \qquad (1)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ – простые числа, $n_1, n_2, \dots, n_k$ – целые положительные числа.

Простым числом p называется целое, которое не имеет никаких делителей кроме 1 и самого себя. Начальный ряд простых чисел (кроме 1, которое условно также принимается за простое число): 2,3,5,7,11,13, 17,19,23,29,31,37, 41,43…

Для перевода числа N в каноническую форму можно воспользоваться следующим алгоритмом. Число N делится на наименьшее простое число 2 до тех пор, пока возможно деление без остатка. Затем делится на следующее простое число 3 и т.д. После чего выписывается (1).

Пример. N = 560; 560 : 2 = 280; 280 : 2 = 140; 140 : 2 = 70; 70 : 2 = 35. Число 35 на 2 нацело не делится. На 3 также не делится. Делим на 5; 35 : 5 = 7. Число 7 простое, следовательно, каноническая форма числа $560 = 2^4 5^1 7^1$.

2.Нахождение количества делителей числа N

Если N представлено в канонической форме (1), то количество делителей числа N, обозначим его D(N), вычисляется следующим образом:

$$D(N) = (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1).$$

Так, для числа 560 количество делителей D(560) = (4+1)(1+1)(1+1) = 20. Если N = P – простое число, то количество его делителей равно 2 (1 и само число P).

3.Нахождение НОК и НОД чисел

Пусть два числа N_1 и N_2 представлены в канонической форме:

$N_1 = p_1^{n1} p_2^{n2} \dots p_k^{nk}$

$N_2 = p_1^{s1} p_2^{s2} \dots p_k^{sk}$

Тогда НОК $(N_1,N_2) = p_1^{\max(n1,s1)}\ p_2^{\max(n2,s2)} \dots p_k^{\max(nk,sk)}$, а

НОД $(N_1,N_2) = p_1^{\min(n1,s1)}\ p_2^{\min(n2,s2)} \dots p_k^{\min(nk,sk)}$.

Примеры 1. Найти НОК и НОД следующих пар чисел:

a) 575 и 155

b) 840 и 188650

c) 4851 и 29106

d) 975 и 616

Если в каноническом представлении одного из чисел отсутствует какой-либо простой сомножитель, его можно ввести в нулевой степени. Например, для чисел $N_1 = 2^3 5^2 7^1$ и $N_2 = 3^1 5^1 11^2$ прежде чем находить НОК и НОД требуется их привести к одинаковой форме, т.е. сделать так, чтобы в каноническом представлении обоих чисел присутствовали бы одинаковые простые числа в соответствующих степенях, а именно:

$N_1 = 2^3 3^0 5^2 7^1 11^0$;
$N_2 = 2^0 3^1 5^1 7^0 11^2$.

Тогда НОК $(N_1,N_2) = 2^3 3^1 5^2 7^1 11^2 = 508200$,

НОД $(N_1,N_2) = 2^0 3^0 5^1 7^0 11^0 = 5$.

Примеры 2 . Найти НОК и НОД следующих пар чисел:

a) $N_1 = 440$; $N_2 = 6050$
b) $N_1 = 234$; $N_2 = 4125$
c) $N_1 = 66550$; $N_2 = 40131$
d) $N_1 = 388$; $N_2 = 1647$

Приведенный алгоритм легко обобщается на произвольное количество чисел, для которых требуется определить НОК и НОД.

Примеры 3. Найти НОК и НОД для следующих наборов чисел:

a) $N_1 = 60$; $N_2 = 350$; $N_3 = 495$;
b) $N_1 = 265$; $N_2 = 104$; $N_3 = 93$.
c) $N_1 = 2100$; $N_2 = 630$; $N_3 = 5880$; $N_4 = 9450$;
d) $N_1 = 700$; $N_2 = 495$; $N_3 = 104$; $N_1 = 103$; $N_2 = 260$; $N_3 = 121$.

4.Нахождение евклидовых чисел

Если P-1 представляется в виде произведения простых чисел в первых степенях, т.е. $P-1 = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s$., то P-1 называется евклидовым числом. Например, P=23. $P-1 = 22 = 2^1 11^1$

Пример. Проверьте, какие из приведенных простых чисел при вычитании 1 являются евклидовыми: 11,29,31,43,53,59,71.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Запустите программу проверки числа. Эта программа позволяет выделить наименьший простой сомножитель из любого числа. Так, если Вы ввели число N, то программа представит его в виде N =p*q', где p – наименьший простой сомножитель числа N. Например, Вы ввели число 21571. Программа представит его в виде: 11*1961. Если теперь ввести число 1961, то программа это число представит в виде: 37*53. Таким образом, каноническое представление числа 21571 = 11*37*53. Ознакомьтесь с работой программы и выполните все примеры, приведенные в теоретической части.
2. Найдите 3 трехразрядных евклидовых числа. Для этого возьмите несколько простых чисел, вычтите из каждого 1 и представьте в канонической форме. Если P-1 будет иметь вид: $P-1 = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s$., то P-1 – евклидово число.
3. Оформите отчет. Отчет должен содержать:
   a) Титульный лист с указанием университета, кафедры, дисциплины, названия лабораторной работы, № группы, фамилии студента и преподавателя.
   b) Описание всех вычислений.
   c) Выводы по всем пунктам.