Лекция 6. Действительные числа

План:

1. Понятие о несоизмеримых отрезках. Бесконечные непериодические десятичные дроби.
2. Арифметические действия над иррациональными числами
3. Свойства множества действительных чисел

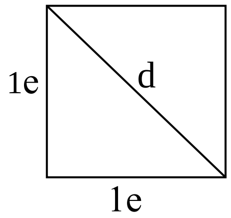
Литература:

1. Евтыхова Н.М. Математика в таблицах и схемах для студентов 2 курса факультета педагогики и психологии / Н.М. Евтыхова - Майкоп, 2019.изд 2-е – исправленное и дополн.-118 с. - (С.109-1113 (таблицы 79-81))

2. Стойлова, Л.П. Математика: учеб. для студентов учреждений высш. образования / Л.П. Стойлова. – 4-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 464 с. (С. 370-373)

3. Математика. Сборник задач: учеб.пособие для студ.учреждений высш.проф.образования/[Л.П.Стойлова, Е.А.Конобеева, Т.А.Конобеева, И.В.Шадрина]. – 2-е изд.,стер. – М.: изд.центр «Академия», 2013. – 240с. (С.154-157)

ТАБЛИЦА 79. ПОНЯТИЕ О НЕСОИЗМЕРИМЫХ ОТРЕЗКАХ. БЕСКОНЕЧНЫЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ.



Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, т.е. если длину стороны квадрата принять за единицу длины, то мера длины диагонали квадрата не выражается рациональным числом.
Доказательство: диагональ квадрата разбивает его на прямоугольные треугольники, тогда по теореме Пифагора
d^2=(1e)^2+(1e)^2. d^2=2e^2. Опустим наименование единицы длины e^2. d^2=2.
Предположим, что существует рациональное число такое, что верно равенство d^2=2 (1). Тогда это число представимо в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Подставим вместо d в равенство (1):

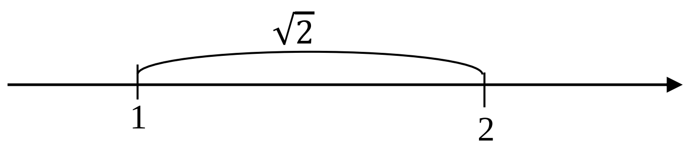
$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ умножим обе части на q^2, получим: $p^2 = 2q^2(*) \Longrightarrow p^2 \vdots 2 \Longrightarrow p \vdots 2 \Longrightarrow (\exists r \in \boldsymbol{Z}) p = 2r$. Подставим в (*)

$(2r)^2 = 2q^2 \Longrightarrow 4r^2 = 2q^2 \Longrightarrow$ по свойству сократимости умножения $2r^2 = q^2 \Longrightarrow q^2 \vdots 2 \Longrightarrow q \vdots 2$

$p \vdots 2 \wedge q \vdots 2 \Longrightarrow$ дробь $\frac{p}{q}$- сократима на 2, что противоречит условию о несократимости дроби $\frac{p}{q}$, а значит предположение неверно

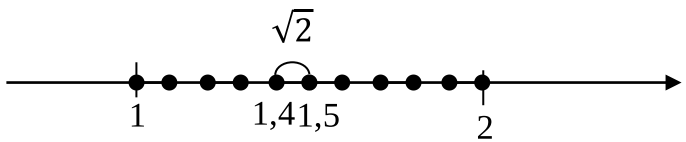
Результат измерения длины диагонали выражается *иррациональным числом*.
Принято говорить, что бесконечные непериодические десятичные дроби являются записью иррациональных чисел.
Например, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \pi$ и т.д.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$
$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 4$$
$$1 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < 4$$



$1 < \sqrt{2} < 2$
Число $\sqrt{2}$ находится между целыми числами 1 и 2.

$$1{,}1^2 = 1{,}21$$
$$1{,}2^2 = 1{,}44$$
$$1{,}3^2 = 1{,}69$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96$$
$$1{,}5^2 = 2{,}25$$



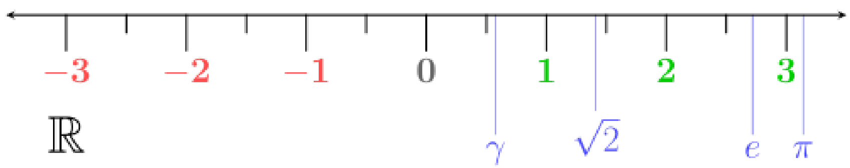
$\mathbf{1{,}4} < \sqrt{\mathbf{2}} < 1{,}5$**,** т.к. $(1{,}4)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < (1{,}5)^2$; $1{,}96 < \left(\sqrt{2}\right)^2 < 2{,}25$
1,4 –приближение числа $\sqrt{\mathbf{2}}$ с недостатком. 1,5 – приближение числа $\sqrt{\mathbf{2}}$ с избытком
Приближение с недостатком получается в результате отбрасывания знаков, с приближением при отбрасывании знаков, последний увеличивается на единицу. Например: $\sqrt{2} = 1{,}4142135624\ldots$; $1{,}414\mathbf{2} < \sqrt{2} < 1{,}414\mathbf{3}$. Приближения с точностью до 0,0001

Таблица 80. Арифметические действия над иррациональными числами

Пусть $\alpha_{н} \leq \alpha < \alpha_{и}$ и $\beta_{н} \leq \beta < \beta_{и}$

Действие	Схема	Пример
сложение	$\alpha_{н} < \alpha < \alpha_{и}$ $\beta_{н} \leq \beta < \beta_{и}$ $\alpha_{н} + \beta_{н} < \alpha + \beta < \alpha_{и} + \beta_{и}$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ $1{,}73 + 1{,}41 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 1{,}74 + 1{,}42$ $3{,}14 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 3{,}16$ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$=3,1…
вычитание	$\alpha_{н} < \alpha < \alpha_{и}$ $\beta_{н} \leq \beta < \beta_{и}$ $\alpha_{н} - \beta_{и} < \alpha - \beta < \alpha_{и} - \beta_{н}$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ $1{,}73 - 1{,}42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1{,}74 - 1{,}41$ $0{,}31 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0{,}33$ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$=0,3…
умножение	$\alpha_{н} < \alpha < \alpha_{и}$ $\beta_{н} \leq \beta < \beta_{и}$ $\alpha_{н} \cdot \beta_{н} < \alpha \cdot \beta < \alpha_{и} \cdot \beta_{и}$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ $1{,}73 \cdot 1{,}41 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1{,}74 \cdot 1{,}42$ $2{,}4393 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 2{,}4708$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$=2,4…
деление	$\alpha_{н} < \alpha < \alpha_{и}$ $\beta_{н} \leq \beta < \beta_{и}$ $\alpha_{н} - \beta_{и} < \alpha - \beta < \alpha_{и} - \beta_{н}$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ $1{,}73 : 1{,}42 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}74 : 1{,}41$ $1{,}2183 \ldots < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1{,}2253..$ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$=1,2…

Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{I}$, тогда $\alpha + \beta \in \boldsymbol{I}$ или $\alpha + \beta \in \boldsymbol{Q}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{I}$, тогда $\alpha - \beta \in \boldsymbol{I}$ или $\alpha - \beta \in \boldsymbol{Q}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{I}$, тогда $\alpha \cdot \beta \in \boldsymbol{I}$ или $\alpha \cdot \beta \in \boldsymbol{Q}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{I}$, тогда $\alpha : \beta \in \boldsymbol{I}$ или $\alpha : \beta \in \boldsymbol{Q}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{Q}$ тогда $\alpha + \beta \in \boldsymbol{I}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{Q}$, тогда $\alpha - \beta \in \boldsymbol{I}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{Q}$, тогда $\alpha \cdot \beta \in \boldsymbol{I}$
Пусть $\alpha \in \boldsymbol{I}, \beta \in \boldsymbol{Q}$, тогда $\alpha : \beta \in \boldsymbol{I}$



Действительные числа – это числа, которые могут быть записаны в виде конечной или бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби.

Из определения действительных чисел понятно, что действительными числами являются:

– любое натуральное число;
– любое целое число;
– любая обыкновенная дробь (как положительная, так и отрицательная);
– любое смешанное число;
– любая десятичная дробь (положительная, отрицательная, конечная, бесконечная периодическая, бесконечная непериодическая).

Но очень часто действительные числа можно видеть в виде корней, степеней, логарифмов и т.п. Более того, сумма, разность, произведение и частное действительных чисел также представляют собой действительные числа.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$$

Если *натуральные числа* возникли в процессе счёта, *рациональные числа*— из потребности оперировать частями целого, то *действительные числа* предназначены для измерения непрерывных величин. Таким образом, расширение запаса рассматриваемых чисел привело ко множеству *действительных* чисел, которое помимо рациональных чисел включает также другие элементы, называемые *иррациональными числами*.

Наглядно понятие *действительного* числа можно представить при помощи числовой прямой. Если на прямой выбрать направление, начальную точку и единицы длины для измерения отрезков, то каждому *действительному* числу можно поставить в соответствие определённую точку на этой прямой, и обратно, каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое *действительное* число, и притом только одно. Вследствие этого соответствия термин «числовая прямая» обычно употребляется в качестве синонима множества *действительных* чисел.

ТАБЛИЦА 81. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Схема 10.

Теории действительных чисел

принцип Карла Вейерштрасса: всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет (единственную) верхнюю грань.

принцип Георга Кантора: всякая стягивающаяся система отрезков числовой прямой имеет единственное число, принадлежащее всем отрезкам

принцип Рихарда Дедекинда: всякое сечение в области действительных чисел имеет рубеж.

Аксиоматика действительных чисел:

1. Линейно упорядоченное множество	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})[\alpha > \beta$ либо $\beta > \alpha$ либо $\alpha = \beta]$
2. Антирефлексивность отношения «больше»	$(\forall\alpha \in \mathbf{R})[\overline{\alpha > \alpha}\,]$
3. Асимметричность отношения «больше»	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})[\alpha > \beta \implies \overline{\beta > \alpha}]$
4. Транзитивность отношения «больше»	$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})[\alpha > \beta \land \beta > \gamma \implies \alpha > \gamma]$
5. Существование сложения	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})(\exists!\,\gamma \in \mathbf{R})[\gamma = \alpha + \beta]$
6. Коммутативность сложения	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})[\alpha + \beta = \beta + \alpha]$
7. Ассоциативность сложения	$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})[(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)]$
8. Существование нейтрального элемента	$(\forall\alpha \in \mathbf{R})(\exists 0 \in \mathbf{R})[\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha]$
9. Существование противоположного элемента	$(\forall\alpha \in \mathbf{R})(\exists -\alpha \in \mathbf{R})[\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0]$
10. Монотонность сложения	$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})[\alpha \geq \beta \iff \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma]$
11. Существование умножения	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})(\exists!\,\gamma \in \mathbf{R})[\gamma = \alpha \cdot \beta]$
12. Коммутативность умножения	$(\forall\alpha,\beta \in \mathbf{R})[\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha]$
13. Ассоциативность умножения	$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})[(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)]$
14. Существование нейтрального элемента	$(\forall\alpha \in \mathbf{R})(\exists 1 \in \mathbf{R})[\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha]$

15. Существование обратного элемента	$(\forall\alpha \in \mathbf{R})(\exists\alpha^{-1} \in \mathbf{R})[\alpha \neq 0 \Longrightarrow \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1]$
16. Дистрибутивность умножения	$(\forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})[(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma]$
17.	$(\forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})[\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma]$
18. Монотонность умножения	$(\forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})[\alpha > \beta \wedge \gamma \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma]$
19.	$(\forall\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})[\alpha > \beta \wedge \gamma \leq 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma]$
20. Аксиома непрерывности	$(\forall\alpha, \beta \in \mathbf{R})[\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \alpha < \beta \Longrightarrow (\exists\gamma \in \mathbf{R})\alpha < \gamma < \beta]$
21.	или по-другому:
22.	Если числовое множество X лежит слева от числового множества Y $((\forall\alpha \in X, \forall\beta \in Y)[\alpha \leq \beta \Longrightarrow (\exists\gamma \in \mathbf{R})\alpha \leq \gamma \leq \beta]$, т.е. существует такое действительное число γ, разделяющее множества X и Y

1. Множество **R** линейно упорядоченно отношением «больше»
2. Множество действительных чисел не содержит наибольшего и наименьшего элементов
3. Множество **R** есть расширение множества рациональных чисел **Q**:
   - $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$
   - Во множестве **R** выполнимы все операции, выполнимые в **Q,** но с новым смыслом как действительные числа. По сути сводятся к операциям над рациональными числами
   - Во множестве **R** выполнима операция не всегда выполнимая в **Q,** это извлечение корня из модуля числа $|\alpha|$
   - **R** есть минимальное расширение **Q**
4. Множество **R** непрерывно