Лекция 5.

Тема «Рациональные числа. Десятичные дроби. »

План

1. Десятичные дроби
2. Сравнение и арифметические действия с десятичными дробями
3. Периодические десятичные дроби. Теоремы об обращении обыкновенной дроби в десятичные
4. Правила перевода десятичных дробей в обыкновенные

Литература:

1. Евтыхова Н.М. Математика в таблицах и схемах для студентов 2 курса факультета педагогики и психологии / Н.М. Евтыхова - Майкоп, 2019.изд 2-е – исправленное и дополн.-118 с. - (С.101-108 (таблицы 75-78))
2. Стойлова, Л.П. Математика: учеб. для студентов учреждений высш. образования / Л.П. Стойлова. – 4-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 464 с. (С. 351-362)
3. Математика. Сборник задач: учеб.пособие для студ.учреждений высш.проф.образования/[Л.П.Стойлова, Е.А.Конобеева, Т.А.Конобеева, И.В.Шадрина]. – 2-е изд.,стер. – М.: изд.центр «Академия», 2013. – 240с. (С.150-153)

Таблица 75. Десятичные дроби

	Формулировка	Пример
Определение	Дробь вида $\frac{m}{10^n}$, *где* $m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}$ называется десятичной дробью	$\frac{3}{10}$; $\frac{17}{10^2}=\frac{17}{100}$; $\frac{9}{10^3}=\frac{9}{1000}$
	Пусть $\lvert m\rvert = a_k\cdot 10^k + a_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \cdots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0$ $\frac{\lvert m\rvert}{10^n} = \frac{a_k\cdot 10^k + a_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \cdots + a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0}{10^n}$ = разделим почленно на 10^n $\underbrace{= a_k\cdot 10^{k-n} + a_{k-1}\cdot 10^{k-1-n} + \cdots + a_n}_{A} + \frac{a_{n-1}}{10^1} + \cdots + \frac{a_2}{10^{n-2}} + \frac{a_1}{10^{n-1}} + \frac{a_0}{10^n} =$ $= A + \frac{a_{n-1}}{10^1} + \cdots + \frac{a_2}{10^{n-2}} + \frac{a_1}{10^{n-1}} + \frac{a_0}{10^n} = \overline{A, a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$ $\overline{A, a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$ - запись десятичной дроби $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ - десятичные знаки А – целая часть	$\frac{35791}{10^3} =$ $\frac{3\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 1}{10^3}$ $= 35 + \frac{7}{10} + \frac{9}{10^2}$ $+ \frac{1}{10^0} = 35{,}791$
Свойства десятичных дробей		
1)	Приписывание слева или справа нулей не изменяет значение десятичной дроби	35,791=35,79100 35,791=0035,791
2)	Отбрасывание слева или справа нулей не изменяет значение десятичной дроби	35,79100=35,791 0035,791=35,791
3)	Любые две дроби можно привести к общему знаменателю. Для этого достаточно приписать к десятичной дроби, у которой меньше десятичных знаков столько нулей, чтобы уравнять количество десятичных знаков в данных дробях	35,791 и 74,5 74,500
4)	Перенос запятой на i знаков вправо увеличивает данное число в 10^i раз. Таким образом, чтобы увеличить число в 10^i раз достаточно перенести запятую на i знаков вправо. При этом, если не хватает десятичных знаков, то приписывают нули справа.	$35{,}791\cdot 10^2 = 3579{,}1$ $74{,}5\cdot 10^3 = 74500$
5)	Перенос запятой на i знаков влево уменьшает данное число в 10^i раз. Таким образом, чтобы уменьшить число в 10^i раз достаточно перенести запятую на i знаков влево. При этом, если не хватает десятичных знаков, то приписывают нули слева	$365{,}791:10^2=3{,}65791$ $74{,}5:10^3=0{,}0745$

Схема 9.

$$\frac{37}{100} = \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} = 0{,}37$$

Ноль целых тридцать семь сотых

$$\frac{307}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 0{,}307$$

Ноль целых триста семь тысячных

$$\frac{37}{1000} = \frac{0}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} = 0{,}037$$

Ноль целых тридцать семь тысячных

$$35{,}791 \cdot 10^2 = 3579{,}1$$

$$74{,}5 \cdot 10^3 = 74{,}500 \cdot 10^3 = 74500$$

$$365{,}791 : 10^2 = 3{,}65791$$

$$74{,}5 : 10^3 = 074{,}5 : 10^3 = 0{,}745$$

$\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$ – *один процент* , $\frac{p}{100} = p\%$, $\frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%$

$\frac{1}{1000} = 0{,}001 = 1‰$ – один промилле, $\frac{p}{1000} = p‰$, $\frac{25}{1000} = 0{,}025 = 25‰$

Таблица 76. Сравнение и арифметические действия с десятичными дробями

	Формулировка	**Примеры**
Правило	Для того, чтобы сравнить две десятичные дроби достаточно: ✓ Привести их к общему знаменателю ✓ Отбросить мысленно запятую ✓ Сравнить полученные целые числа	2,91 и 2,84754 2,91000 и 2,84754 291000 > 284754, значит 2,91>2,84754
определение	Пусть даны две положительные десятичные дроби: $x = \overline{A, a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0}$ и $y = \overline{B, b_{m-1}b_{m-2} \dots b_2b_1b_0}$ тогда $x>y$, когда выполняется одно из условий 1) $A>B$ 2) $A = B \wedge a_{n-1} > b_{m-1}$ 3) $A = B \wedge a_{n-1} = b_{m-1} \wedge \dots \wedge a_i > b_j$	$\underline{3}$,91>$\underline{2}$,84754 2,$\underline{9}$1>2,$\underline{8}$4754 2,84$\underline{9}$328>2,84$\underline{7}$54
правило сравнения	Если данные дроби разного знака, то больше положительная дробь Если данные дроби отрицательные, то больше та, у которой модуль меньше	2,84754>-2,91 -2,84754>-2,61
правило сложения	Чтобы сложить две десятичные дроби достаточно: ✓ Привести их к общему знаменателю ✓ Сложить полученные числа как целые, не обращая внимания на запятую ✓ В сумме отделить запятой столько десятичных знаков, сколько и в каждом слагаемом	3,91+1,3456 +1,3456 $\underline{3{,}9100}$ …5,2556
правило вычитания	Чтобы вычесть из одной десятичные дроби другую достаточно: ✓ Привести их к общему знаменателю ✓ Сложить полученные числа как целые, не обращая внимания на запятую ✓ В сумме отделить запятой столько десятичных знаков, сколько и в каждом слагаемом	3,91-1,3456 _3,9100 $\underline{1{,}3456}$ 2,5644

правило умножения	Чтобы умножить две десятичные дроби достаточно: ✓ Отбросить мысленно запятые и перемножить их как целые числа ✓ В произведении отделить запятой справа налево столько десятичных знаков, сколько в сумме десятичных знаков каждого множителя	$3{,}\underline{91}\cdot 0{,}\underline{2}$ $391\cdot 2=782$ $3{,}\underline{91}\cdot 0{,}\underline{2}=0{,}\underline{782}$
правило деления	Чтобы разделить одну десятичную дробь на другую достаточно: ✓ В делителе перенести запятую вправо за последнюю цифру ✓ В делимом перенести вправо запятую на столько же десятичных знаков, сколько их было в делителе ✓ Делим делимое на делитель уголком, пока не будут исчерпаны цифры целой части делимого ✓ Ставят запятую в частном и продолжают деление ✓ Если цифры делимого исчерпаны, а остаток не равен нулю, то в делимом приписывают нули и продолжают процесс деления ✓ Если через конечное число шагов остаток окажется равным нулю, то в частном получится конечная десятичная дробь, в противном случае – бесконечная десятичная дробь	3,91:0,2= 39,1:2 _39,1 | 2 2 | 19,55 _19 18 _11 10 _10 10 0 _64,28,5 | 0,33, 33 194,8030303…. _312 297 _158 132 _265 264 _100 99 1 64,285=194,8030303…

Таблица 77. Периодические десятичные дроби. Теоремы об обращении обыкновенной дроби в десятичные.

Схема 9.

$\frac{1}{21} = 0{,}047619047619047619 \dots . = 0,(047619)$ – чисто-периодическая дробь

$0,\underbrace{(047619)}_{\text{период}}$, n=6-длина периода – количество цифр периода

$\frac{1}{60} = 0{,}01666.. = 0{,}01(6)$ - смешанно-периодическая дробь

$0, \underbrace{01}_{\text{предпериод}}\left(\underbrace{6}_{\text{период}}\right), n = 1, k = 2 -$ длина предпериода

	Формулировка	Запись	Примеры
Теорема 1.	Для того, чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была представима конечной десятичной дробью необходимо и достаточно, чтобы каноническое разложение знаменателя q содержало лишь степени 2 или 5	$\frac{p}{q} = \overline{A, a_1 a_2 \dots a_n} \Leftrightarrow$ $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$	$\frac{1}{25}; 25 = 5^2; \frac{1}{25} = 0{,}04$ $\frac{1}{8}; 8 = 2^3; \frac{1}{8} = 0{,}125$ $\frac{1}{200};\ 200 = 2^3 \cdot 5^2;$ $\frac{1}{200} = 0{,}005$
Теорема 2.	Для того, чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была представима чисто-периодической десятичной дробью необходимо и достаточно, чтобы каноническое разложение знаменателя q было взаимно просто с числом 10, т.е. НОД(q;10)=1. Разложение q **не** содержит 2 и 5	$\frac{p}{q} = \overline{A, (a_1 a_2 \dots a_n)} \Leftrightarrow$ НОД(q;10)=1	$\frac{1}{3}$; НОД $(3; 10) = 1;$ $\frac{1}{3} = 0,(3)$
Теорема 3.	Для того, чтобы несократимая дробь $\frac{p}{q}$ была представима смешанно-периодической десятичной дробью необходимо и достаточно, чтобы каноническое разложение знаменателя q содержало степени 2 или 5 и какое-то число d, которое было взаимно просто с числом 10, т.е. НОД(d;10)=1.	$\frac{p}{q} = \overline{A, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+n})}$ $\Leftrightarrow$ $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot d \wedge$НОД$(d; 10) =$	$\frac{1}{60}; 60 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ НОД $(3; 10) = 1$ $\frac{1}{60} = 0{,}01(6)$

Доказательство теоремы 1.

Необходимость: $\frac{p}{q} = \overline{A, a_1 a_2 \dots a_n} \Rightarrow q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$.

$\frac{p}{q} = \overline{A, a_1 a_2 \dots a_n} = A\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n} = A + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{(2 \cdot 5)^n} = A + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{2^n \cdot 5^n}$, $q = 2^n \cdot 5^n$ ч. и т. д.

Достаточность $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \Rightarrow \frac{p}{q} = \overline{A, a_1 a_2 \dots a_n}$

$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}} = \frac{p \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta}}{2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta}} = \frac{p \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta}}{2^{\gamma} \cdot 5^{\gamma}} = \frac{p \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta}}{(2 \cdot 5)^{\gamma}} = \frac{p \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta}}{10^{\gamma}}$, где$\gamma = \max(\alpha; \beta)$. получили десятичную дробь

При этом $\gamma = \max(\alpha; \beta)$ покажет количество десятичных знаков.

Таблица 78. Правила перевода десятичных дробей в обыкновенные

	Формулировка	Запись	Примеры
правило 1	Чтобы преобразовать конечную десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе записать число всеми цифрами после запятой, а в знаменателе - из 1 и нулей, количество которых равно числу десятичных знаков.	$\overline{A,a_1a_2\ldots a_n} = A\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$	$7{,}4519 = 7\frac{4519}{10000}$
Правило 2	Чтобы преобразовать чисто-периодическую десятичную дробь в обыкновенную достаточно в числителе записать число всеми цифрами в периоде, а в знаменателе – число из такого количества 9-ок сколько цифр в периоде	$\overline{A,(a_1a_2\ldots a_n)} = \mathrm{A}\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99..9}_{n\ 9-\text{ок}}}$	$2,(32507) = \frac{32507}{99999}$
Правило 3	Чтобы преобразовать смешанно-периодическую десятичную дробь в обыкновенную достаточно в числителе записать разность между числом, записанным всеми цифрами после запятой и числом, записанным цифрами предпериода, а в знаменателе записать число из 9-ок и 0-ей: девяток столько, сколько цифр в периоде, нулей столько, цифр в предпериоде.	$\overline{A,a_1a_2\ldots a_k(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n})} =$ $= \mathrm{A}\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}} - \overline{a_1a_2\ldots a_k}}{\underbrace{99..9}_{n\ 9-\text{к}}\underbrace{0\ldots00}_{k\ \text{нулей}}}$	6,123(4579)= $6{,}123(4507)$ $= \frac{1234507-123}{9999000} = \frac{1234384}{9999000}$

Вывод правила 2.

Пусть дана чисто-периодическая дробь: $\overline{A,(a_1a_2\ldots a_n)}$. Рассмотрим случай, когда целая часть равна 0, т.к. изменения касаются только дробной части. $x=\overline{0,(a_1a_2\ldots a_n)}\Leftrightarrow$ Умножим ее на 10^n. Для этого достаточно перенести вправо запятую на n знаков и получим$x\cdot 10^n=\overline{0,a_1a_2\ldots a_n(a_1a_2\ldots a_n)}\Rightarrow x\cdot 10^n=\overline{a_1a_2\ldots a_n}+\underbrace{0,\overline{(a_1a_2\ldots a_n)}}_{x}\Rightarrow x\cdot 10^n=\overline{a_1a_2\ldots a_n}+x\Rightarrow$

$$x\cdot 10^n-x=\overline{a_1a_2\ldots a_n}\Rightarrow x\cdot(10^n-1)=\overline{a_1a_2\ldots a_n}\Rightarrow x=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n-1}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots 9}_{n\ 9-\text{ок}}}$$

Вывод правила 3.

Пусть дана смешанно-периодическая дробь: $x=0,\overline{a_1a_2\ldots a_k(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n})}$. Умножим ее на 10^k. Получим:

$$x\cdot 10^k=\overline{a_1a_2\ldots a_k}+0,\overline{(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n})}$$

$$x\cdot 10^k=\overline{a_1a_2\ldots a_k}+\frac{\overline{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}}{10^n-1}$$

$$x\cdot 10^k=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}\cdot(10^n-1)+\overline{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}}{10^n-1}$$

$$x\cdot 10^k=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k\underbrace{00\ldots 0}_{n\text{ нулей}}}-\overline{a_1a_2\ldots a_k}+\overline{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}}{10^n-1}$$

$$x\cdot 10^k=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}-\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^n-1}$$

$$x=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}-\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{(10^n-1)\cdot 10^k}=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{k+n}}-\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{\underbrace{99..9}_{n\ 9-\text{ок}}\underbrace{00\ldots 0}_{k\text{ нулей}}}$$