Лекция 3
Тема: «Расширение числового множества . Целые числа»
План.

1. Понятие расширения числового множества
2. Целые числа (отрицательные, положительные. Сравнение чисел. Модуль числа.
3. Сложение целых чисел. Законы сложения.
4. Разность, произведение и частное целых чисел.
5. Геометрическая интерпретация целых чисел и модуля целого числа.
6. Свойства множества целых чисел

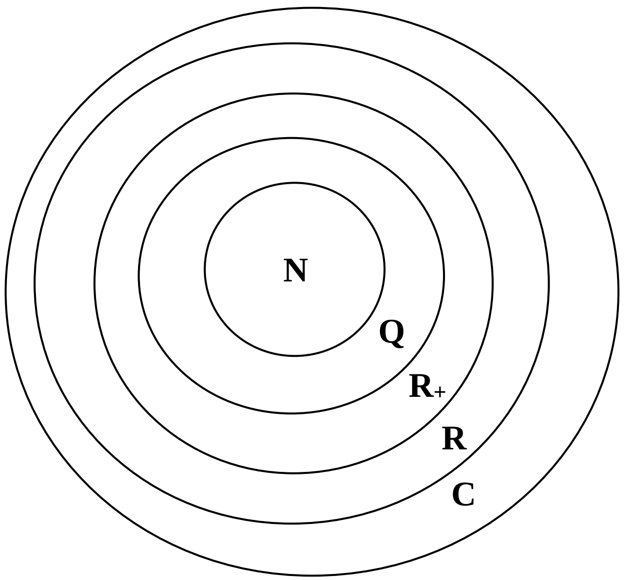
Литература:

Евтыхова Н.М. Математика в таблицах и схемах для студентов 2 курса факультета педагогики и психологии / Н.М. Евтыхова - Майкоп, 2019.изд 2-е – исправленное и дополн.-118 с. - (С.84 - 90 (таблицы 57-65))

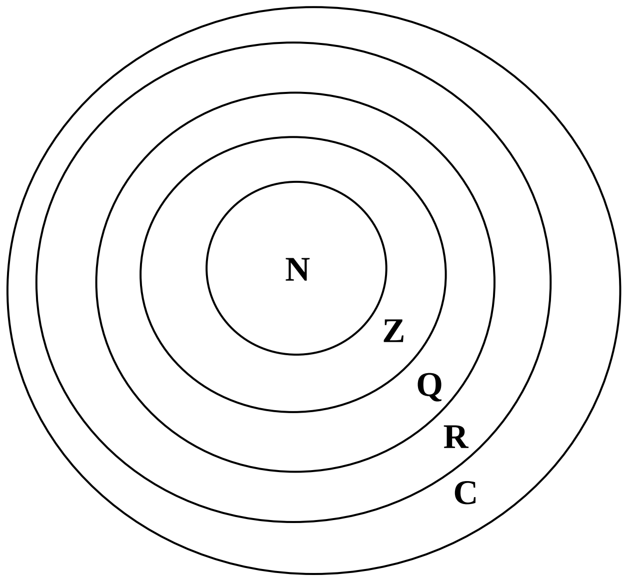
Таблица 57. Расширение числового множества

Схема 8.

Исторический путь



Логический путь

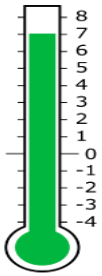


Расширением числового множества А называется множество В для которого справедливы следующие требования:

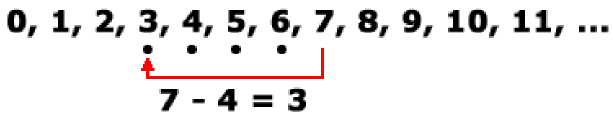
1. $A \subset B$
2. Все операции и отношения определенные во множестве А, также определены во множестве В
3. Во множестве В существует операция не определенная или не всегда определенная во множестве А
4. В – есть минимальное расширение множества А, т.е. не существует такого множества, что

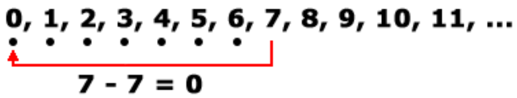
$A \subset C \subset B$, для которого верны требования 1-3

Таблица 58. Целые числа (отрицательные, положительные).



На рисунке слева изображён термометр, который показывает температуру 7° тепла. Если температура понизится на 4°, то термометр будет показывать 3° тепла. Уменьшению температуры соответствует действие вычитания: 7 - 4 = 3
Если температура понизится на 7°, то термометр будет показывать 0°. Уменьшению температуры соответствует действие вычитания: 7 - 7 = 0
Если же температура понизится на 8°, то термометр покажет -1° (1° мороза). Но результат вычитания 7 - 8 нельзя записать с помощью натуральных чисел и нуля, но имеет вполне реальный смысл.
Проиллюстрируем вычитание на ряде целых положительных чисел:





1) От числа 7 отсчитаем влево 4 числа и получим 3:
2) От числа 7 отсчитаем влево 7 чисел и получим 0:
Отсчитать в ряду положительных целых чисел от числа 7 влево 8 чисел нельзя. Чтобы действие 7 - 8 стало выполнимым, расширим ряд положительных целых чисел. Для этого влево от нуля запишем (справа налево) по порядку все натуральные числа, добавляя к каждому из них знак (-), показывающий, что это число стоит слева от нуля.

запись	**чтение**
-6	слева от нуля на 6 единиц
+6 =6	справа от нуля на 6 единиц

…., -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7,…

Целые отрицательные числа ($\mathbf{Z}_-$)	Не отрицательное и не положительное число	Целые положительные числа ($\mathbf{Z}_+$) Натуральные числа (**N**) $\mathbf{N}=\mathbf{Z}_+$

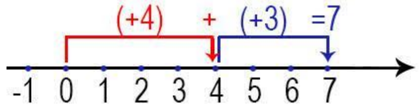
Z

$\boldsymbol{Z = Z_- \cup \{0\} \cup Z_+}$.- **множество целых чисел**

Таблица 59. Сравнение чисел. Модуль числа

Название	Формулировка	Примеры
противоположные числа	Целые числа, которые отличаются только знаком, называются противоположными числами: ***a*** и ***–a*** Замечание: если *a* – положительное число, то *–a* – отрицательное число; если *a* – отрицательное число, то *–a* – положительное число число 0 – противоположно самому себе	5 и -5; 10 и -10 если *a*=+2, то *–a*=-2; если a=-2, то –a=-(-2)=+2
модуль числа	Модулем целого положительного числа называется само это число. Модулем целого отрицательного числа называется противоположное ему число. Модуль числа 0 есть число 0. $\|a\| = \begin{cases} a, \text{если } a \text{ положиельное} \\ -a, \text{если } a \text{ отрицательное} \\ 0, \text{если } a = 0 \end{cases}.$	$\|7\| = 7,$ $\|-7\| = -(-7) = +7 = 7,$ $\|0\| = 0$
больше	Из двух целых чисел больше то, которое стоит правее в ряду целых чисел **…., -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7,…** Если целое число *a* больше целого числа *b*, то число *b* меньше числа *a* (*b* левее *a*)	1>-1 -5>-7 0>-3
	Любое положительное число больше 0 Любое отрицательное число меньше 0 Любое положительное число больше любого отрицательного числа	15>0 -15<0 -15<15
свойства отношения «больше»	$(\forall a \in \boldsymbol{Z})[\overline{a > a}]$ $(\forall a, b \in \boldsymbol{Z})[a > b \Rightarrow \overline{b > a}]$ $(\forall a, b, c \in \boldsymbol{Z})[a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c]$	$\|\boldsymbol{a}\| = \begin{cases} \boldsymbol{a}, \text{если } \boldsymbol{a} > 0 \\ -\boldsymbol{a}, \text{если } \boldsymbol{a} < 0 \\ \boldsymbol{0}, \text{если } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \end{cases}$

Таблица 60. Сложение целых чисел. Законы сложения

<table>
<tr><td>определение</td><td colspan="3">Сумма целых чисел a и b есть число c, отстоящее в ряду целых чисел от a на $|b|$ чисел вправо, если b>0 и влево, если b<0</td></tr>
<tr><td>Правило 1. Сложение чисел с одинаковыми знаками</td><td>Чтобы сложить два целых числа с одинаковыми знаками, нужно вычислить сумму их модулей и поставить перед суммой знак слагаемого</td><td>

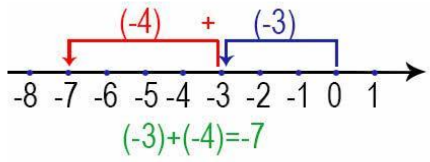
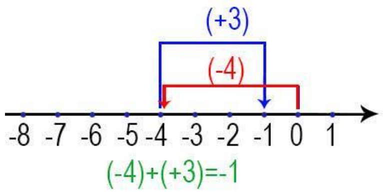
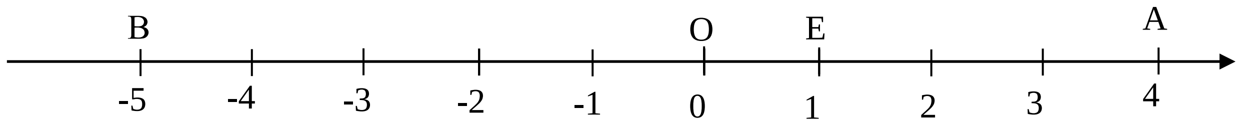

</td><td>$+(+4+(+3)=$
$+(|+4|+|+3|)=$
$+(4+3)=+7=7$
$(-4)+(-3)=-(|-4|+|-3|)$
$=-(4+3)=-7$</td></tr>
<tr><td>Правило 2. Сложение чисел с разными знаками</td><td>Чтобы сложить два целых числа с разными знаками, нужно из большего по модулю числа вычесть меньшее по модулю число и перед разностью поставить знак большего по модулю числа</td><td>
</td><td>$(-4)+(+3)=-(|-4|-|+3|)$
$=-(4-3)=-1$
$(+2)+(-5)=2-5$
$=-(|-5|-|2|)$
$=-(5-2)=-3$
$(-2)+(+5)=+(|+5|-|-2|)$
$=+(5-2)=+3$
$=3$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Законы сложения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. закон коммутативности</td><td colspan="2">$(\forall a,b\in\boldsymbol{Z})[a+b=b+a]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. закон ассоциативности</td><td colspan="2">$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Z})[(a+b)+c=a+(b+c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. существование нейтрального элемента</td><td colspan="2">$(\forall a\in\boldsymbol{Z})(\exists 0\in\boldsymbol{Z})[a+0=0+a=a]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. существование симметричного элемента</td><td colspan="2">$(\forall a\in\boldsymbol{Z})(\exists -a\in\boldsymbol{Z})[a+(-a)=-a+a=0]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. закон сократимости (в одну сторону)</td><td colspan="2">$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Z})[a=b\Leftrightarrow a+c=b+c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. закон монотонности (в одну сторону)</td><td colspan="2">$(\forall a,b,c\in\boldsymbol{Z})[a>b\Leftrightarrow a+c>b+c)]$</td></tr>
</table>

ТАБЛИЦА 61. РАЗНОСТЬ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

<table>
<tr><td colspan="5">Разность целых чисел</td></tr>
<tr><td>Определение</td><td colspan="3">Разностью целых чисел a и b есть число c, которое в сумме с числом b равна a.
$(a-b)+b=\big(a+(-b)\big)+b=a+\big((-b)+b\big)=a+0=a$</td><td>$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[a-b=c \Leftrightarrow a=b+c]$</td></tr>
<tr><td>правило</td><td colspan="3">Чтобы из одного целого числа вычесть другое целое число, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a-b=a+(-b)$</td><td>7-9=7+(-9)=-(9-7)=-2</td></tr>
<tr><td colspan="5">Произведение целых чисел</td></tr>
<tr><td>определение</td><td>Произведением двух целых чисел называется произведение их модулей со знаком плюс(+), если эти числа одинаковых знаков, и со знаком минус(-), если они разных знаков</td><td>2·3=6; -2·(-3)=6;
-2·3=-6; 2·(-3)=-6</td><td colspan="2" rowspan="2">Запоминалка
Умножение и деление чисел с разными знаками: представляем положительное число - «друг», а отрицательное - «враг», тогда:
Друг(+) моего врага(-)= мой враг(-)
Враг(-) моего друга(+)= мой враг(-)
Враг(-) моего врага(-)= мой друг(+)
Друг(+) моего друга(+)= мой друг(+)</td></tr>
<tr><td>определение</td><td>Если $|a|$ делится на $|b|$, то частным двух целых чисел a и b называется частное их модулей со знаком плюс(+), если эти числа одинаковых знаков, и со знаком минус(-), если они разных знаков</td><td>40:5=8; -40:(-5)=8
-40:5=-8; 40:(-5)=-8</td></tr>
<tr><td colspan="5">Законы умножения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. закон коммутативности</td><td colspan="3">$(\forall a,b\in \boldsymbol{Z})[a\cdot b=b\cdot a]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. закон ассоциативности</td><td colspan="3">$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. существование нейтрального элемента</td><td colspan="3">$(\forall a\in \boldsymbol{Z})(\exists 1\in \boldsymbol{Z})[a\cdot 1=1\cdot a=a]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. закон поглощения</td><td colspan="3">$(\forall a\in \boldsymbol{Z})(\exists 0\in \boldsymbol{Z})[a\cdot 0=0\cdot a=0]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. закон сократимости (в одну сторону)</td><td colspan="3">$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[a=b\wedge c\neq 0 \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. закон монотонности (в одну сторону)</td><td colspan="3">$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[a>b\wedge c>0 \Leftrightarrow a\cdot c>b\cdot c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[a>b\wedge c<0 \Leftrightarrow a\cdot c<b\cdot c)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. дистрибутивные законы</td><td colspan="3">правый$(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">8.</td><td colspan="3">левый $(\forall a,b,c\in \boldsymbol{Z})[a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c]$</td></tr>
</table>

Таблица 62. Геометрическая интерпретация целых чисел и модуля целого числа



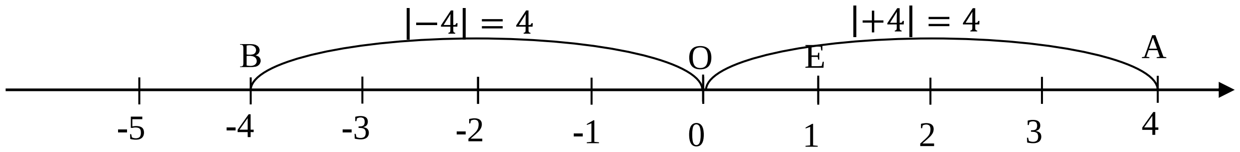
Точка O – начало системы координат. O→0, O(0) - точка имеет координату 0

Отрезок OE=e – единичный отрезок на прямой, E→1, E(1) – точка E имеет координату 1.

Прямая OE – координатная ось

OA=4·OE. Точка A отстоит на 4 единицы правее точки O. A(4) – точка A имеет координату 4

OB =5·OE. Точка B отстоит на 5 единиц левее точки O. B(-5) – точка B имеет координату (-5)



Отрезки OA=OB, т.е. точки A и B находятся на равном расстоянии от точки O:

$|+4| = 4$, $|-4| = 4$

Модуль числа $|a|$ - это расстояние от точки O(0) до точки A(a): $|a| = |\mathrm{OA}|$, поэтому $|a| \geq 0$

Правило	**Примеры**
Если перед скобками стоит знак плюс (+), то при раскрытии скобок знаки чисел в скобках не изменяются	+(25+18-68+34+24-89)= 25+18-68+34+24-89
Если сумма заключается в скобки и перед скобками стоит знак плюс (+), то в скобках знаки слагаемых не изменяются	25+18-68+34+24-89=+(25+18-68+34+24-89)
Если перед скобками стоит знак минус (-), то при раскрытии скобок знаки чисел в скобках изменяются на противоположные	-(25+18-68+34+24-89)= -25-18+68-34-24+89
Если сумма заключается в скобки и перед скобками стоит знак минус (-), то в скобках знаки слагаемых изменяются на противоположные	25+18-68+34+24-89=-(-25-18+68-34-24+89)

Таблица 63. Свойства множества целых чисел

Название	Формулировка	Запись
линейная упорядоченность	Множество целых чисел линейно - упорядоченно, т.е. для любых целых чисел имеет место одно и только одно из отношений: либо $a<b$, либо $a>b$, либо $a=b$	$(\forall a, b \in \boldsymbol{Z})[a < b, \text{либо } a > b, \text{либо } a = b]$
отсутствие наименьшего элемента	Во множестве **Z** не существует наименьшего числа	$(\forall a \in \boldsymbol{Z})(\exists \dot{a} \in \boldsymbol{Z})[\dot{a} < a]$
отсутствие наибольшего элемента	Во множестве $\boldsymbol{Z}$ не существует наибольшего числа	$(\forall a \in \boldsymbol{Z})(\exists a' \in \boldsymbol{Z})[a' > a]$
дискретность	Между любыми двумя целыми числами лежит лишь конечное число целых чисел.	$(\forall a \in \boldsymbol{Z})(\nexists b \in \boldsymbol{Z})[a < b < a + 1]$
свойство Архимеда	Для любых целых чисел a и b существует целое число n такое, что $n \cdot b > a$	$(\forall a, b \in \boldsymbol{Z})(\exists n \in \boldsymbol{Z})[nb > a]$
	Множество $\boldsymbol{Z}$ есть расширение множества **N**	1. $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ 2. Отношения «равно», «меньше», операции сложения и умножения, выполнимые во множестве $\boldsymbol{N}$**,** всегда выполнимы в $\boldsymbol{Z}$ с новым смыслом как целых чисел 3. Во множестве $\boldsymbol{Z}$ всегда выполнима операция вычитания, не всегда выполнимая в $\boldsymbol{N}$ 4. Множество $\boldsymbol{Z}$ есть минимальное расширение множества $\boldsymbol{N}$